Международная научная конференция «Суперкомпьютерные дни в России»
(Москва, 23-24 сентября 2024 г.)

Исследование масштабируемости параллельной реализации алгоритма AlFaMove для линейного программирования на кластерной вычислительной системе

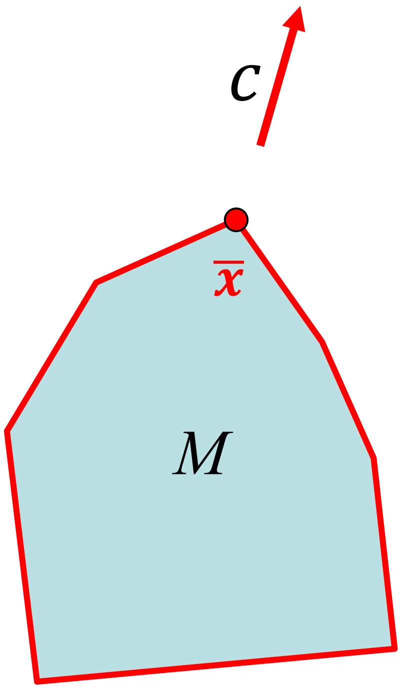
Н.А. Ольховский,
д.ф.-м.н. Л.Б. Соколинский

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект №23-21-00356).

Задача линейного программирования

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \arg\max\{\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}\rangle | A\mathbf{x} \le \boldsymbol{b}\}$$



Допустимый многогранник $M = \{\boldsymbol{x} | A\mathbf{x} \le \boldsymbol{b}\}$

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
- A – матрица $m \times n$
- $\boldsymbol{b}$ – вектор размерности m
- $\boldsymbol{c}$ – вектор размерности n
- $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{c}, \mathbf{x}\rangle$ – целевая функция

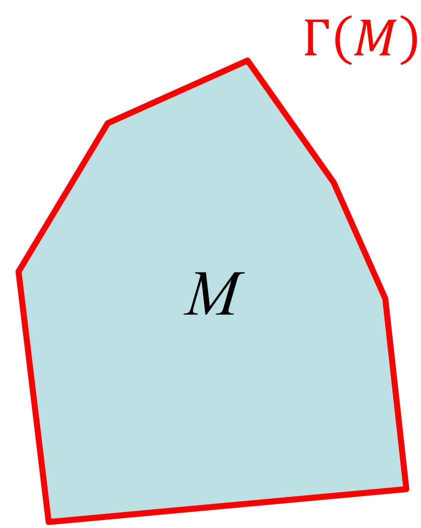
$\langle \boldsymbol{c}, \mathbf{x}\rangle$ – скалярное произведение

Допустимый многогранник M

i – номер строки матрицы A

$$H_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{x} \rangle = b_i\}$$
$$\widehat{H}_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{x} \rangle \leq b_i\}$$

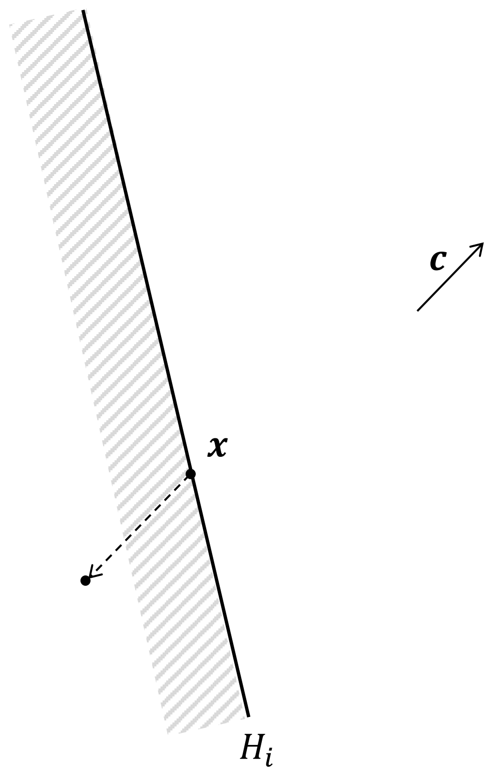
$$M = \bigcap_{i=1}^{m} \widehat{H}_i$$



Обозначим через $\Gamma(M)$ множество граничных точек допустимого многогранника M

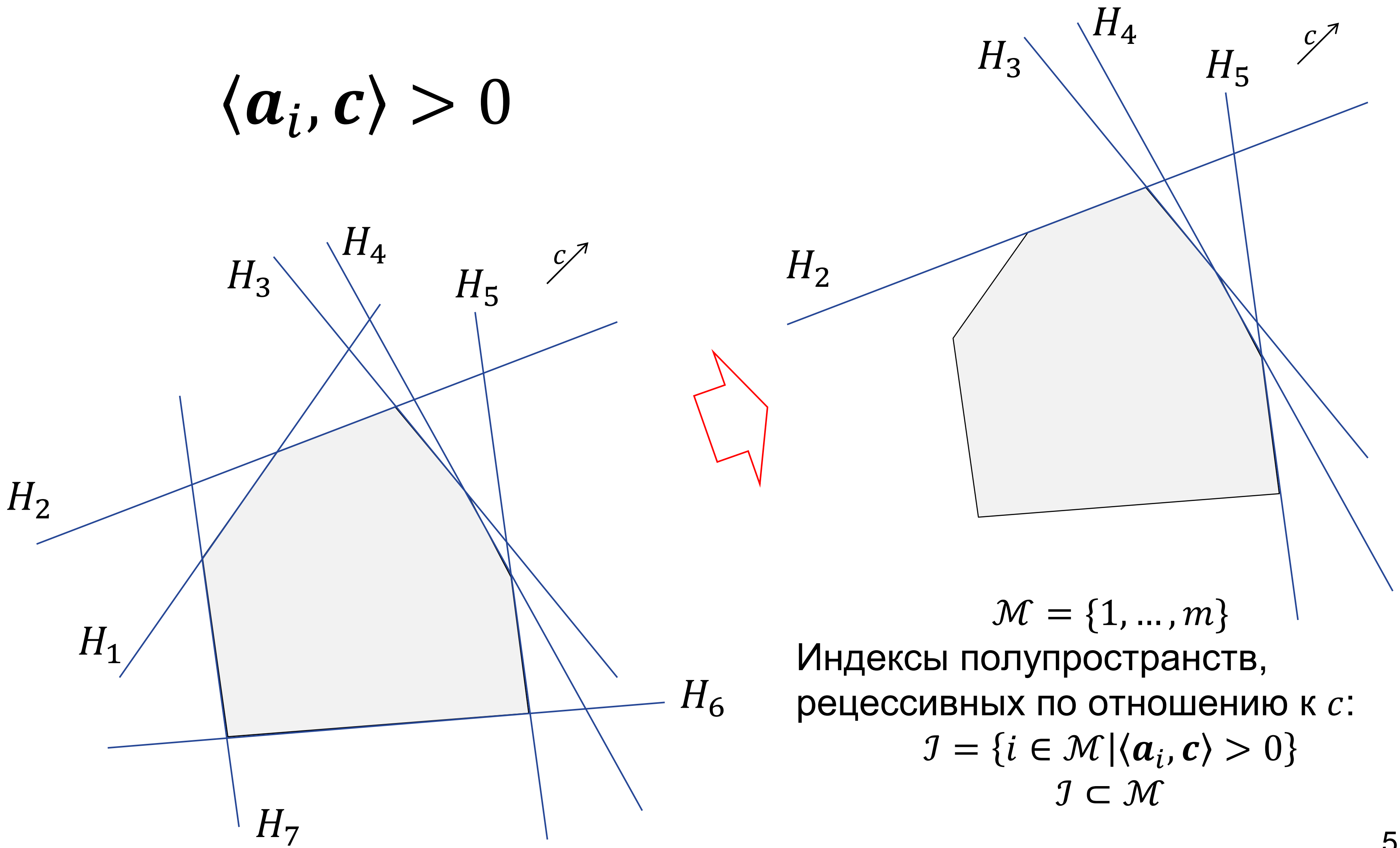
Рецессивное полупространство

$$\forall \boldsymbol{x} \in H_i, \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0} : \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{c} \notin \widehat{H}_i$$



Критерий рецессивности

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c} \rangle > 0$$



$$\mathcal{M} = \{1, \dots, m\}$$

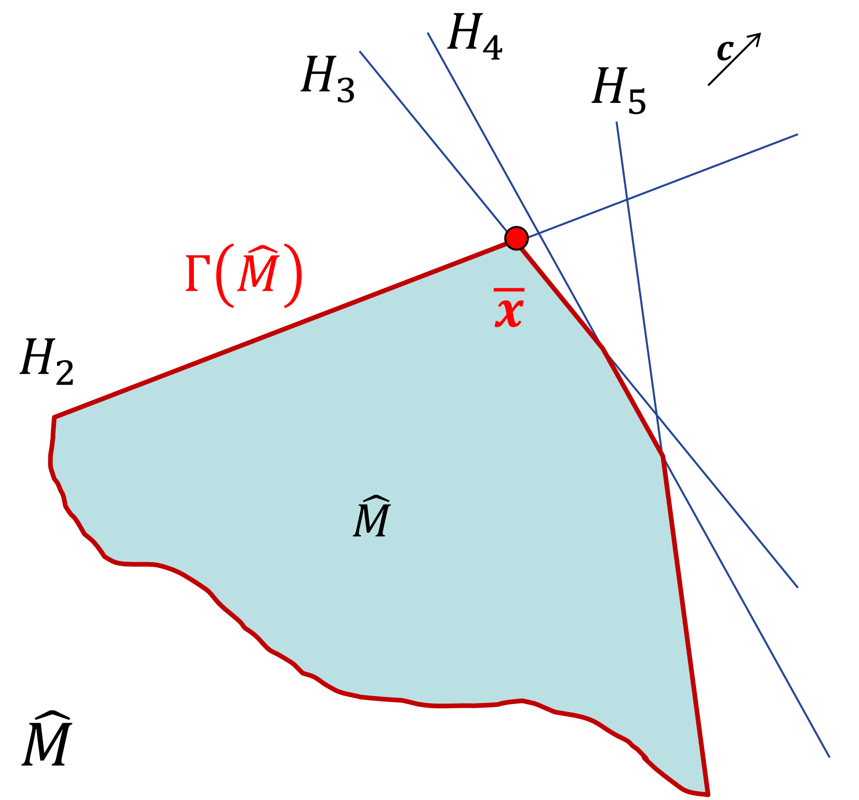
Индексы полупространств, рецессивных по отношению к c:

$$\mathcal{I} = \{i \in \mathcal{M} | \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c} \rangle > 0\}$$

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$$

Рецессивный многогранник

$$\widehat{M} = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \widehat{H}_i$$



Обозначим через $\Gamma(\widehat{M})$ множество граничных точек рецессивного многогранника $\widehat{M}$

Ортогональная проекция $\boldsymbol{\pi}_H(\boldsymbol{v})$

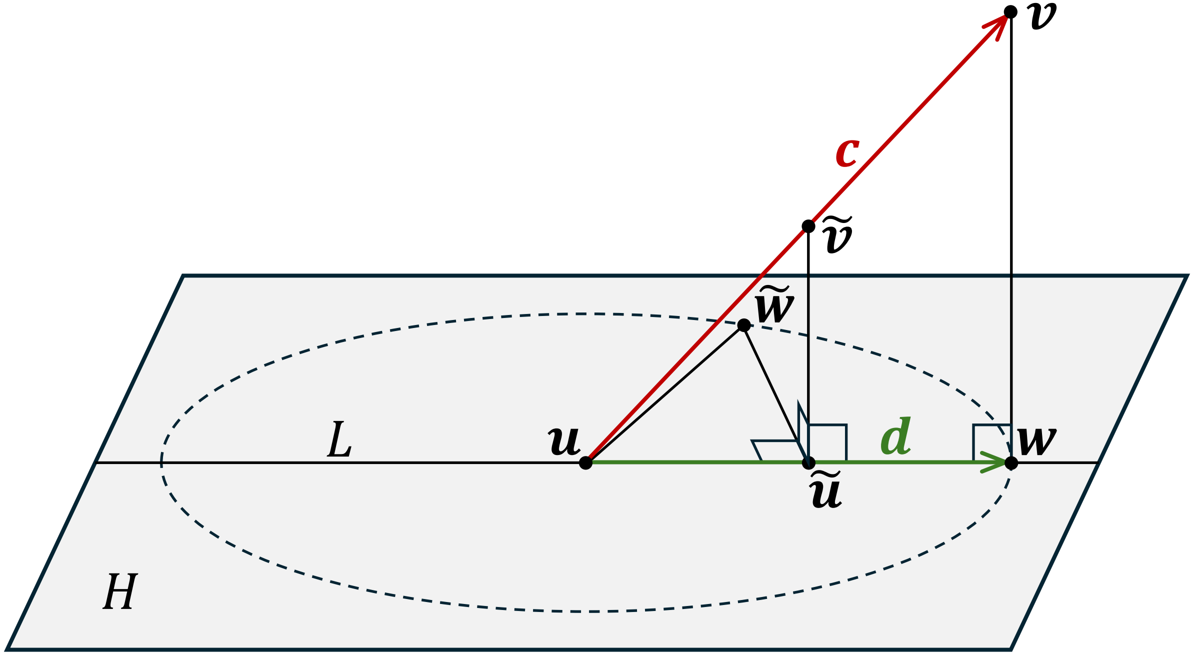
Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется гиперплоскость

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = b\}$$

Ортогональная проекция $\boldsymbol{\pi}_H(\boldsymbol{v})$ точки $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ на гиперплоскость H определяется формулой

$$\boldsymbol{\pi}_H(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle - b}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a}.$$

Оптимальный путь



$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}$$

Линейное многообразие

Пусть $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, m\}$, $\mathcal{J} \neq \emptyset$, и $\bigcap_{i \in \mathcal{J}} H_i \neq \emptyset$. В этом случае множество индексов $\mathcal{J}$ определяет в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейное многообразие

$$L = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} H_i$$

k_L — размерность линейного многообразия L.

Проблема: $k_L < n - 1$

Проекционное отображение $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$

Определим проекционное отображение $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\mathcal{J}|} \sum_{i \in \mathcal{J}} \boldsymbol{\pi}_{H_i}(\boldsymbol{x})$$

Известно, что отображение $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ является непрерывным L-фейеровским отображением, и последовательность точек

$$\{\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\varphi}^k(\boldsymbol{x}_0)\}_{k=1}^{\infty}$$

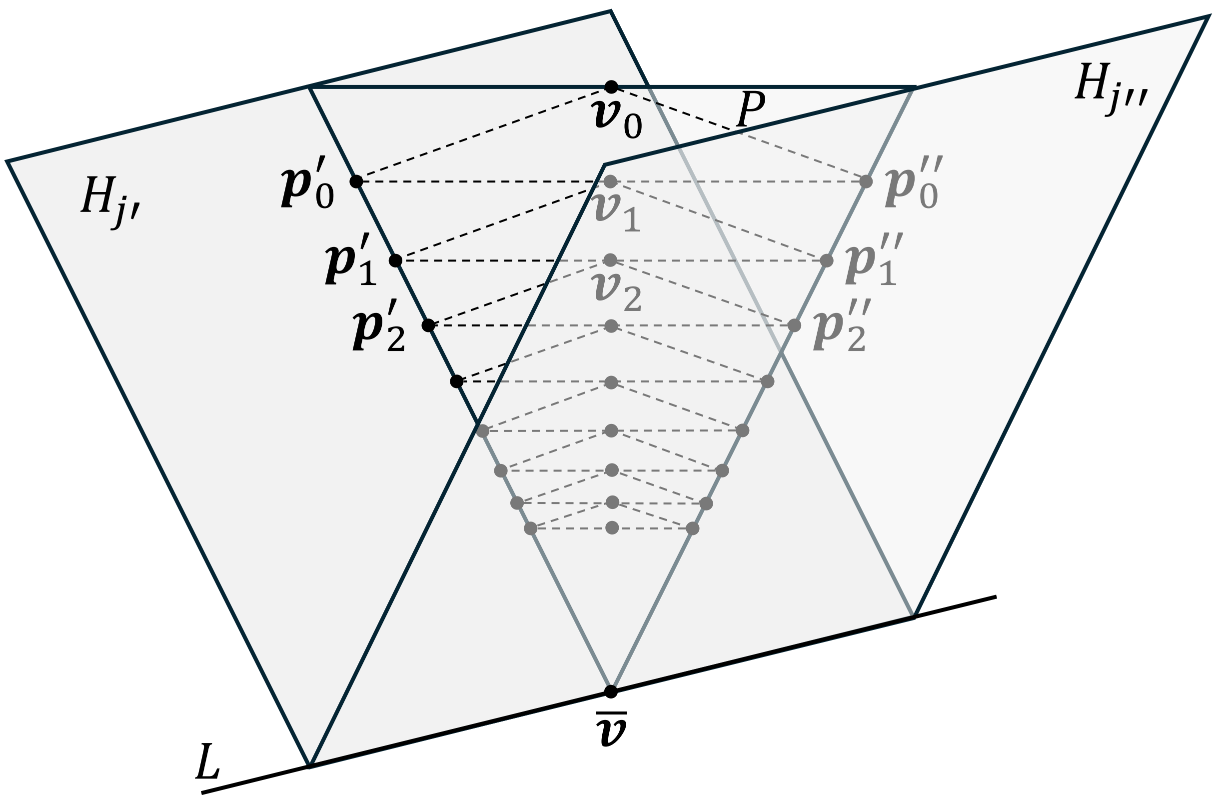
порождаемая этим отображением, начиная с произвольной точки $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, сходится к точке, принадлежащей L:

$$\boldsymbol{x}_k \to \widetilde{\boldsymbol{x}} \in L$$

Псевдопроекция $\boldsymbol{\rho}_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{x})$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\boldsymbol{\rho}_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\varphi}^k(\boldsymbol{x})\right\|=0$$

$$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\colon\boldsymbol{\rho}_L(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\pi}_L(\boldsymbol{x})$$



Алгоритм движения по граням AlFaMove

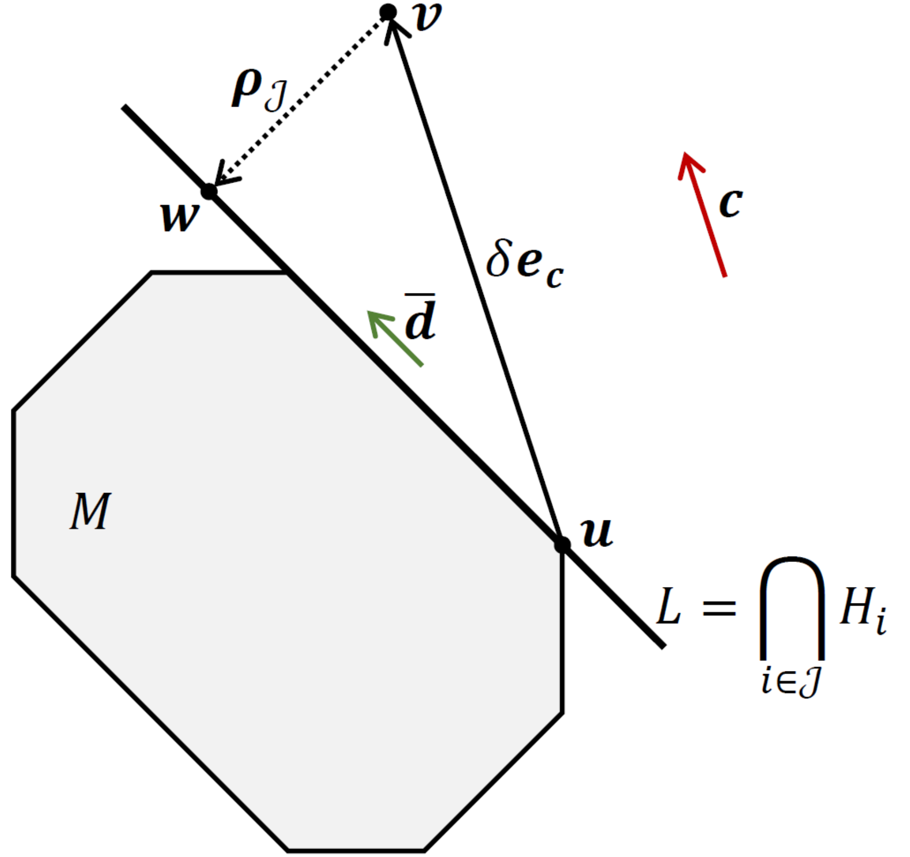
Алгоритм 3 Алгоритм движения по граням AlFaMove

Require: $\hat{H}_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle \leqslant b_i\}$; $M = \bigcap_{i=1}^{m} \hat{H}_i$; $\hat{M} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \hat{H}_i$; $i \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c} \rangle > 0$

input $\boldsymbol{u}_0$
assert $\boldsymbol{u}_0 \in M \cap \Gamma(\hat{M})$
$\boldsymbol{d}_0 := \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_0)$
assert $\boldsymbol{d}_0 \neq \boldsymbol{0}$
$k := 0$
repeat
    $\boldsymbol{u}_{k+1} := \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{d}_k)$
    $\boldsymbol{d}_{k+1} := \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_{k+1})$
    $k := k + 1$
until $\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{0}$
output $\boldsymbol{u}_k$ ▷ Решение задачи ЛП (1)
stop

Вычисление вектора движения $\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$

Вычисление вектора направления движения $\bar{\boldsymbol{d}}$ по грани линейного многообразия L.



Процедура $\boldsymbol{D}(\cdot)$

Алгоритм 2 Вычисление вектора движения $\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$

Require: $H_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle = b_i\}$; $\boldsymbol{u} \in \Gamma(M)$

function $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$
    $\mathcal{U} := \emptyset$ ▷ $\mathcal{U}$ — множество индексов гиперплоскостей H_i, проходящих через точку $\boldsymbol{u}$
    for $i = 1 \ldots m$ **do**
        if $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{u} \rangle = b_i$ **then**
            $\mathcal{U} := \mathcal{U} \cup \{i\}$
        end if
    end for
    $\bar{\boldsymbol{d}} := \boldsymbol{0}$
    $f := -\infty$ ▷ f — значение целевой функции $f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$
    $\boldsymbol{e_c} := \boldsymbol{c}/\|\boldsymbol{c}\|$
    $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{e_c}$ ▷ Большой параметр $\delta > 0$
    for $\mathcal{J} \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \setminus \emptyset$ **do** ▷ $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ — множество всех подмножеств множества $\mathcal{U}$
        $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{\rho}_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{v})$
        $\boldsymbol{d} := \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}$
        $\boldsymbol{e_d} := \boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\|$
        if $(\boldsymbol{u} + \tau \boldsymbol{e_d}) \in M$ **then** ▷ Малый параметр $\tau > 0$
            if $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u} + \tau \boldsymbol{e_d} \rangle > f$ **then**
                $f := \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u} + \tau \boldsymbol{e_d} \rangle$
                $\bar{\boldsymbol{d}} := \boldsymbol{d}$
            end if
        end if
    end for
    return $\bar{\boldsymbol{d}}$
end function

Вектор-функция $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$

Обозначим

$$\mathcal{Q} = \{i \in \{1, \dots, m\} | \langle \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{u} \rangle < b_i \wedge \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{d} \rangle > 0 \}$$

тогда

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d}) = \arg\min_{i \in \mathcal{Q}} \{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}\| | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d})\}$$

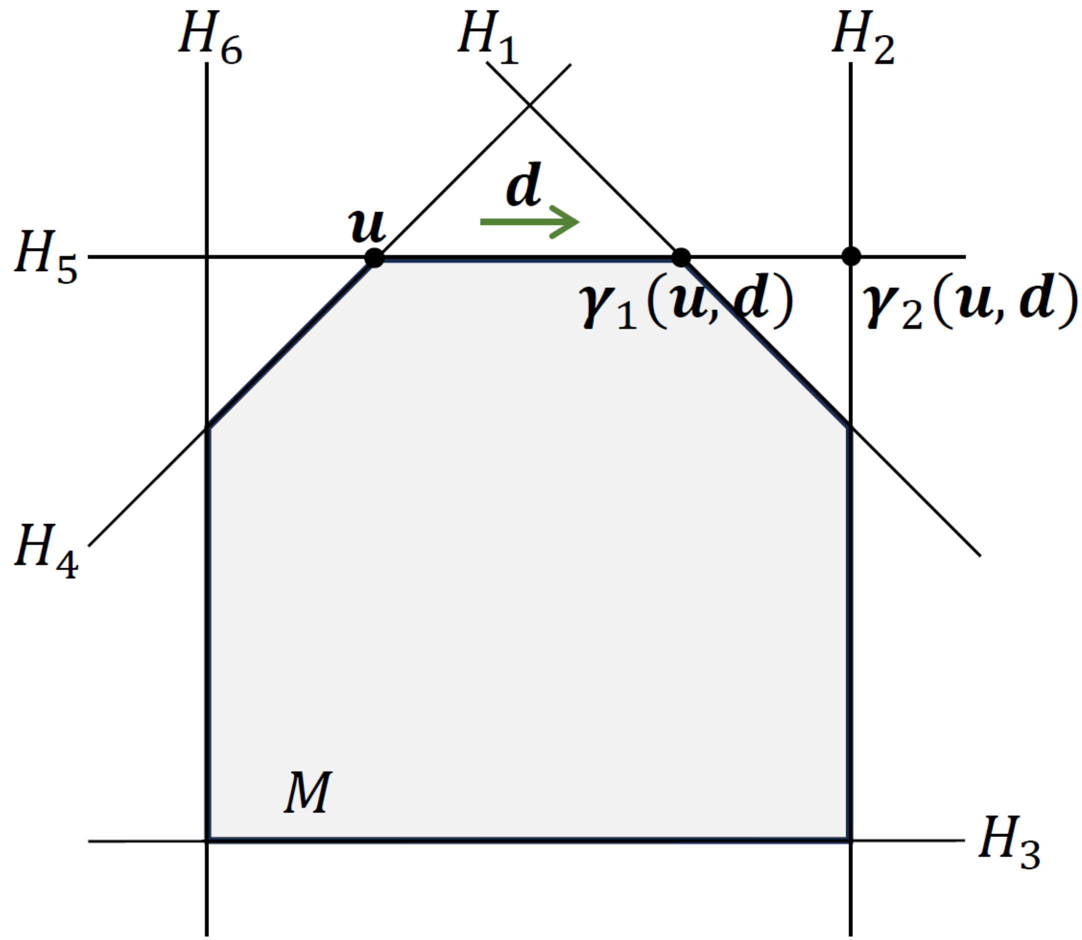
Здесь $\boldsymbol{\gamma}_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d})$ обозначает вектор-функцию, вычисляющую косоугольную проекцию точки $\boldsymbol{u}$ на гиперплоскость H_i по направлению $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{\gamma}_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{u} - \frac{\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{u} \rangle - b_i}{\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{d} \rangle} \boldsymbol{d}.$$

Вектор-функция $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$

Действие функции $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{\gamma}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{d})$$



Параллельный алгоритм

Основные моменты:

- BSF-каркас: мастер-рабочие
- Функции высшего порядка *Map* и *Reduce*
- Список $\mathcal{L}_{map} = [1, \dots, K]$, где $K = 2^{|\mathcal{U}|} - 1$

Репозитории:

– Параллельная реализация AlFaMove:
https://github.com/nikolay-olkhovsky/AlFaMove

– Тестовые задачи ЛП:
https://github.com/nikolay-olkhovsky/Set-of-LP-Problems

Вычислительные эксперименты

Суперкомпьютер «Торнадо ЮУрГУ»

Количество узлов:	480
Тип процессоров:	Intel Xeon X5680 (6 ядер, 3.33 ГГц)
Число процессоров на узел:	2
Память на узел:	25 ГБ DDR3
Память сопроцессора:	8 Гб
Тип системной сети:	InfiniBand QDR (40 Гбит/с)
Операционная система:	Linux CentOS 6.2

Гиперкуб с отсеченной вершиной

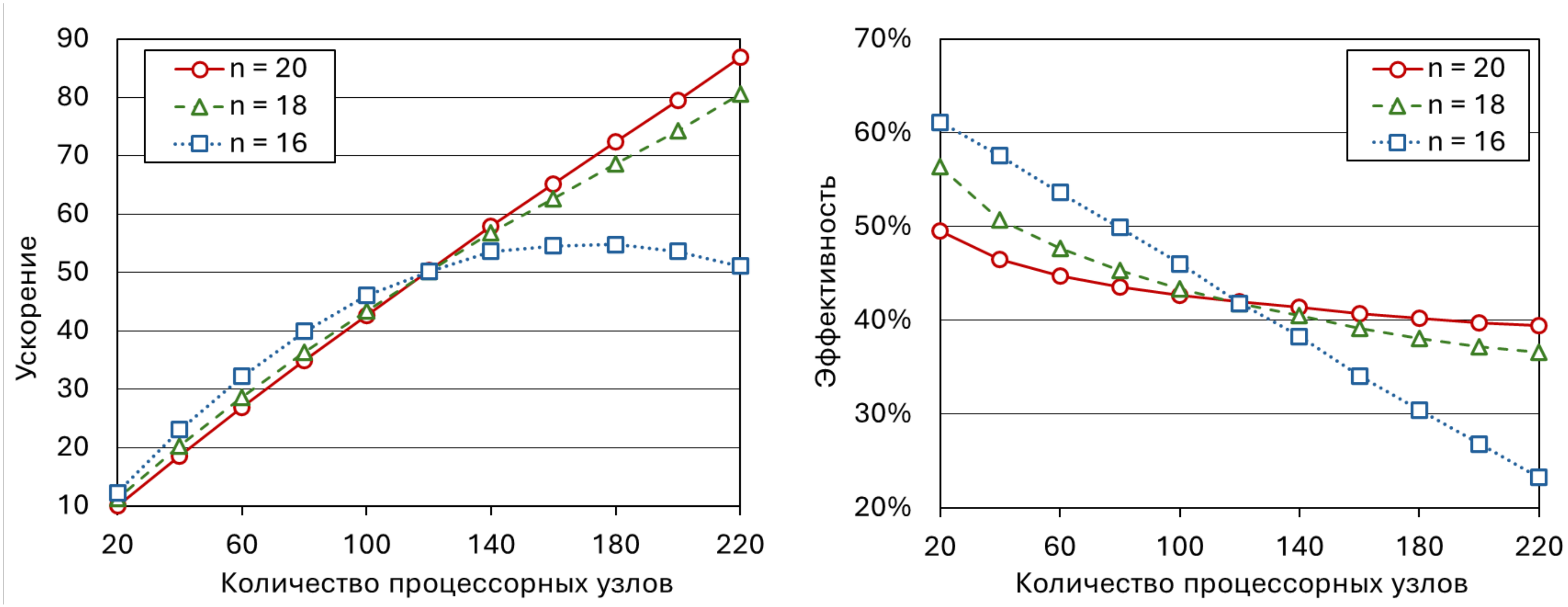
$$\begin{cases} x_1 & & & & & \leqslant & 200 \\ & x_2 & & & & \leqslant & 200 \\ & & & & & \vdots & \\ & & & x_n & & \leqslant & 200 \\ x_1 + & x_2 & \cdots & + & x_n & \leqslant & 200(n-1)+100 \\ x_1 \geqslant 0, & x_2 \geqslant 0, & \cdots & , x_n \geqslant 0. & & & \end{cases}$$

Градиент целевой функции: $\boldsymbol{c} = (1, 2, \ldots, n)$

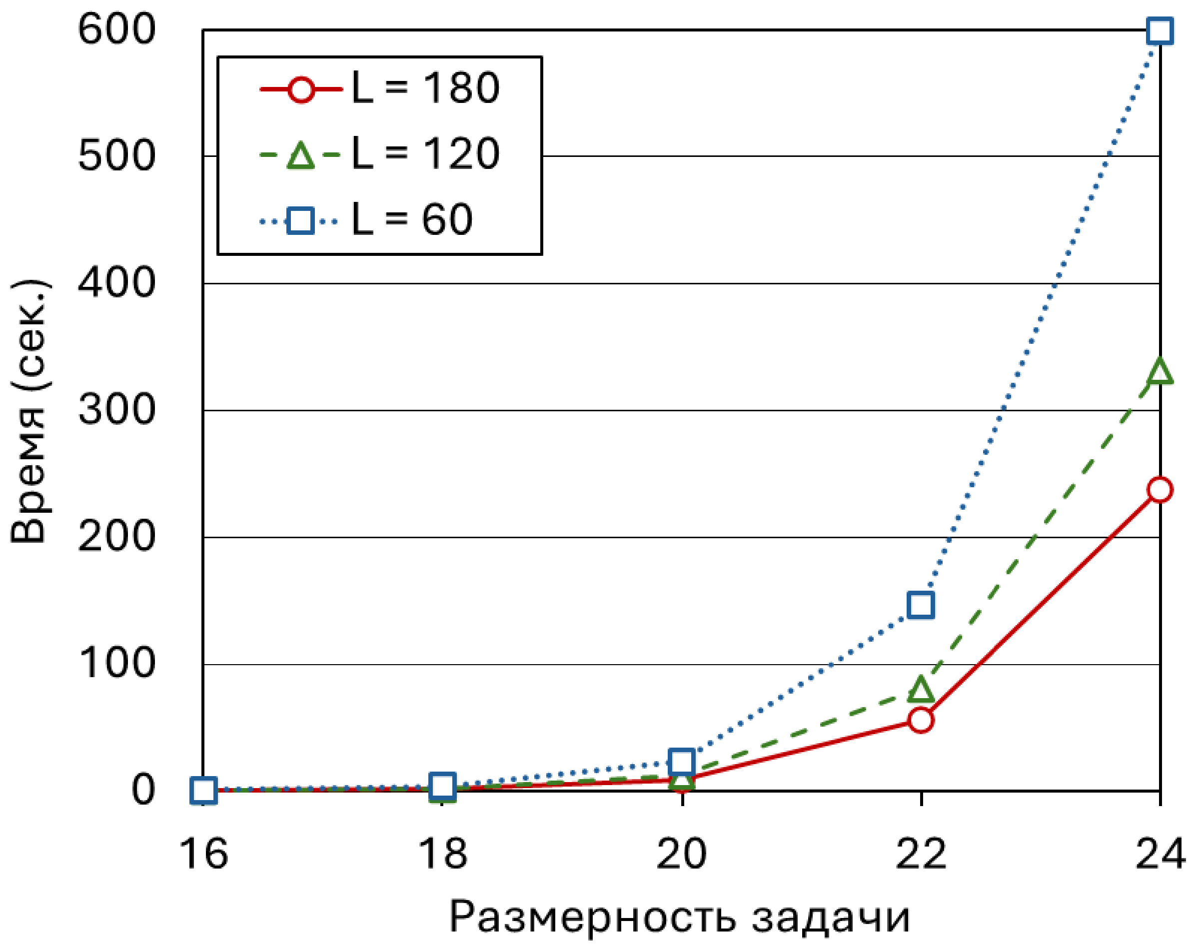
Стартовая точка:

$$x_1 = 0, \quad \ldots \quad x_{n/2} = 0, \quad x_{n/2+1} = 200, \quad \ldots \quad x_n = 200$$

Ускорение и эффективность



Время работы алгоритма



Куб Кли-Минти

$$\begin{cases} x_1 & & & & & & & & & \leqslant & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & & & & & \leqslant & 25 \\ 8x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & & & \leqslant & 125 \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ 2^n x_1 & + & 2^{n-1} x_2 & & \cdots & + & 4x_{n-1} & + & x_n & \leqslant & 5^n \\ x_1 \geqslant 0, & & x_2 \geqslant 0, & & \cdots & & , x_n \geqslant 0. & & & & \end{cases}$$

Градиент целевой функции: $\boldsymbol{c} = \left(2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots, 2, 1\right)$

Стартовая точка: начало координат.

Сравнение с симплекс-методом

Размер-ность	AlFaMove				Simplex
	Граница масшт-ти	Время (сек.)	Относит. погреш-ть	Кол-во итераций	Кол-во итераций
5	10	0.2	$0.9 \cdot 10^{-12}$	9	31
6	15	2	$0.2 \cdot 10^{-12}$	11	63
7	20	13	$0.8 \cdot 10^{-11}$	13	127
8	25	126	$0.8 \cdot 10^{-11}$	15	255
9	30	1445	$0.2 \cdot 10^{-10}$	17	511

Благодарю за внимание!

Николай Ольховский
89226343351 (Telegram, Viber, WhatsApp)
olkhovskiina@susu.ru