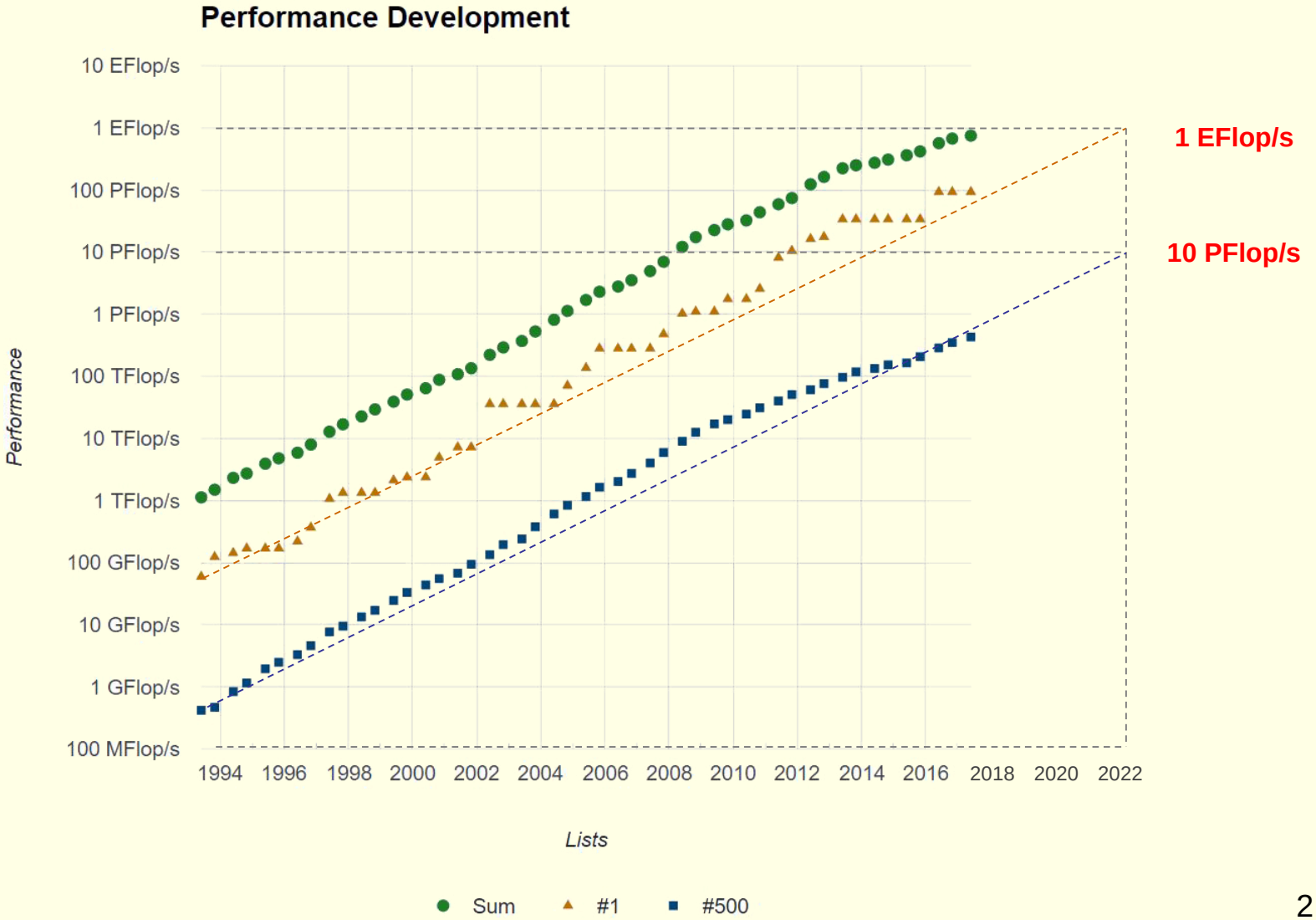
Исследование масштабируемости алгоритма NSLP для решения нестационарных задач линейного программирования на кластерных вычислительных системах

д.ф.-м.н. Л.Б. Соколинский, к.ф.-м.н. И.М. Соколинская
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-07-00352 а, Правительства РФ в соответствии с Постановлением №211 от 16.03.2013 г. (соглашение № 02.A03.21.0011) и Министерства образования и науки РФ (государственное задание 2.7905.2017/8.9).

TOP500 (июнь 2017)



Изменение основной парадигмы дизайна алгоритма

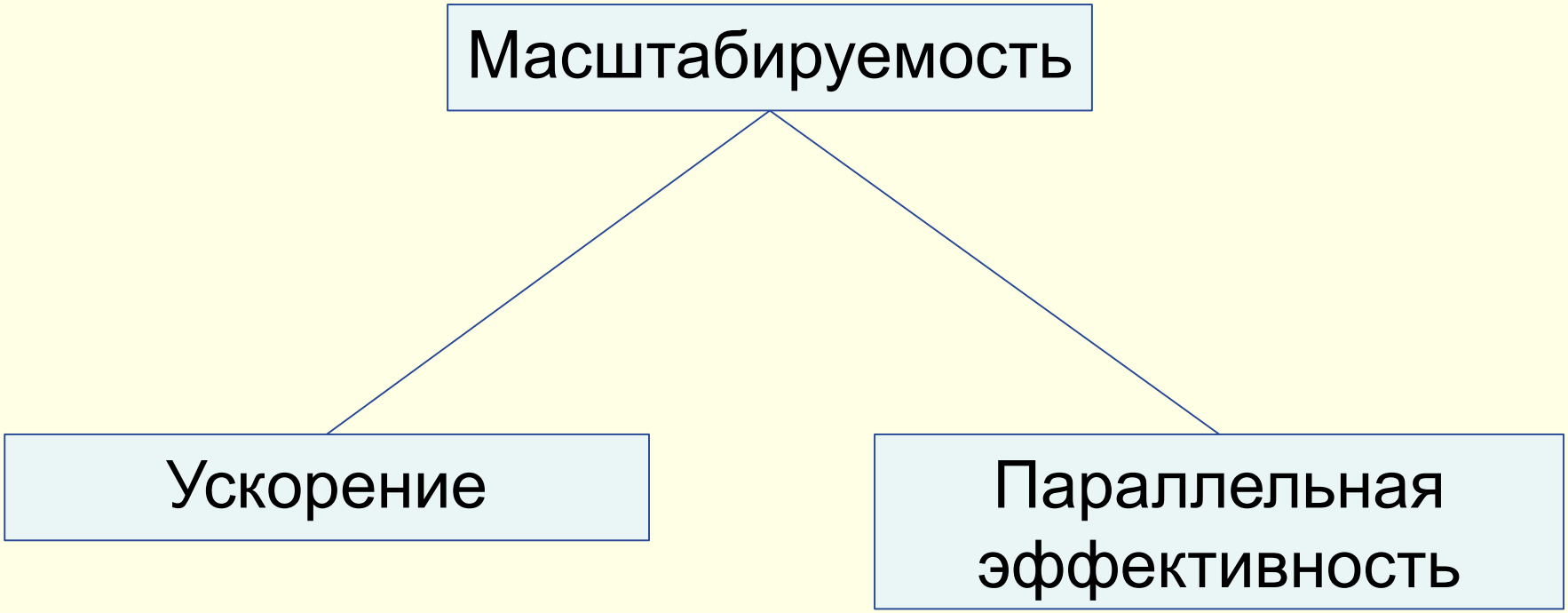
Разработать алгоритм, эффективно работающий на малых вычислительных ресурсах

1971

Разработать алгоритм, способный эффективно загрузить большие вычислительные ресурсы

2017

Главная характеристика современного алгоритма



Ускорение

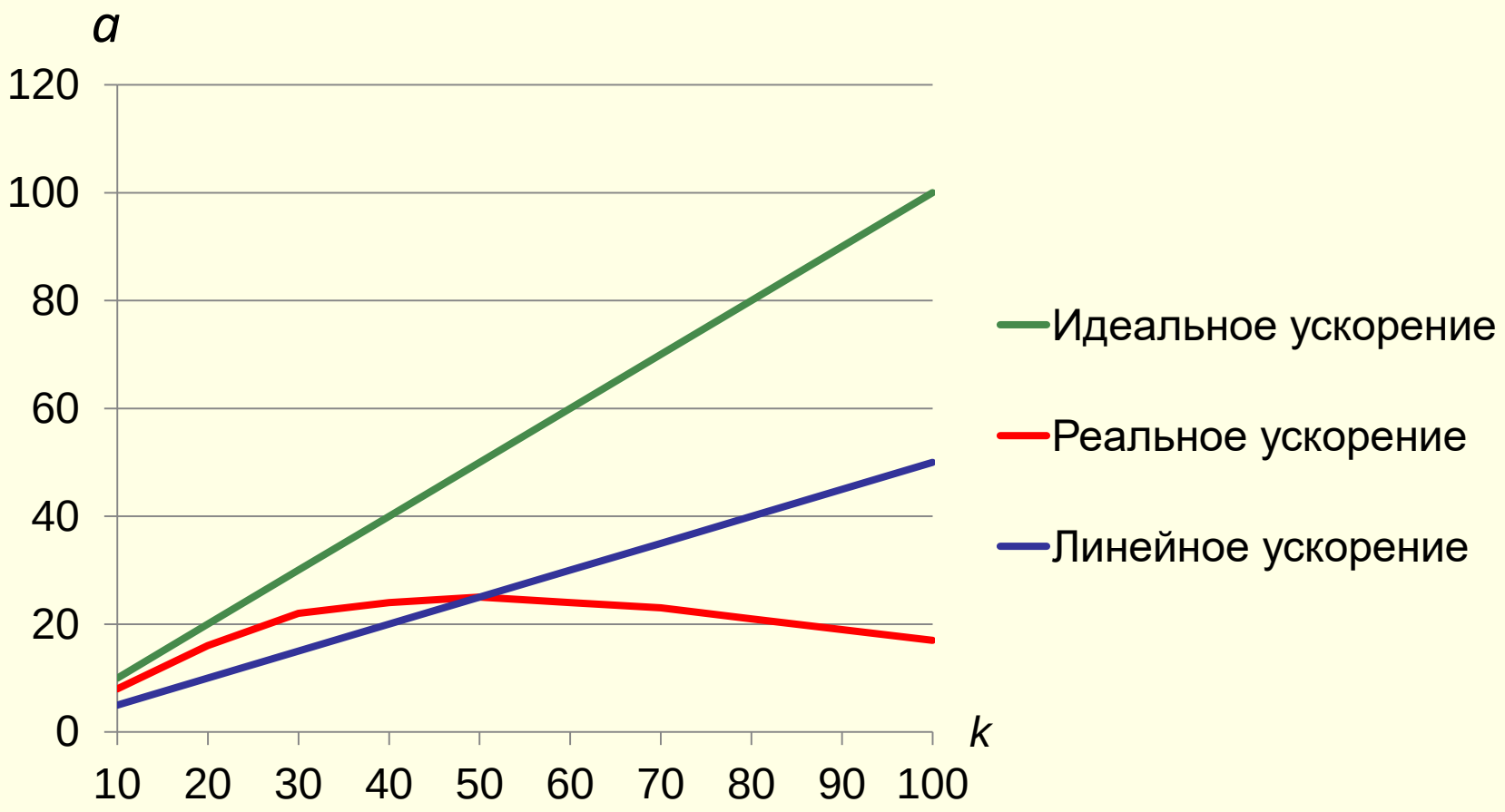
$$a(k) = \frac{t_1}{t_k}$$

Время решения задачи на 1 узле

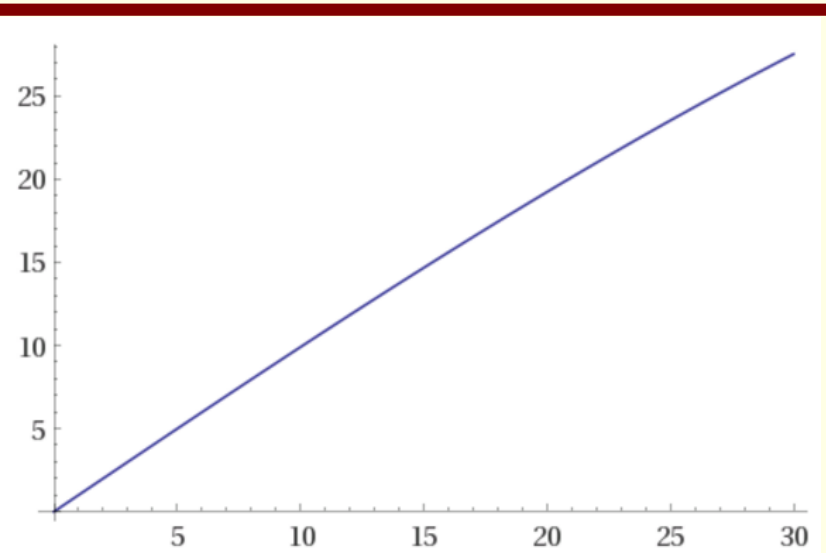
Время решения задачи на *k* узлах

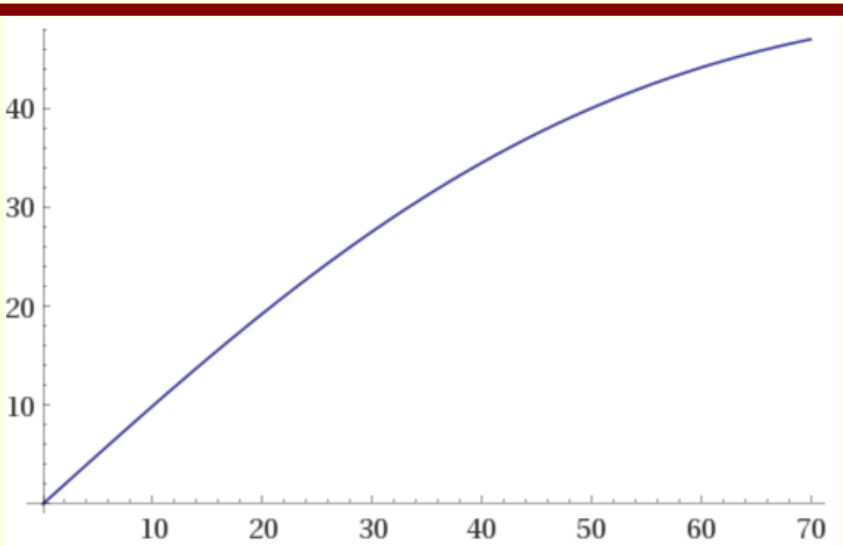
Количество узлов

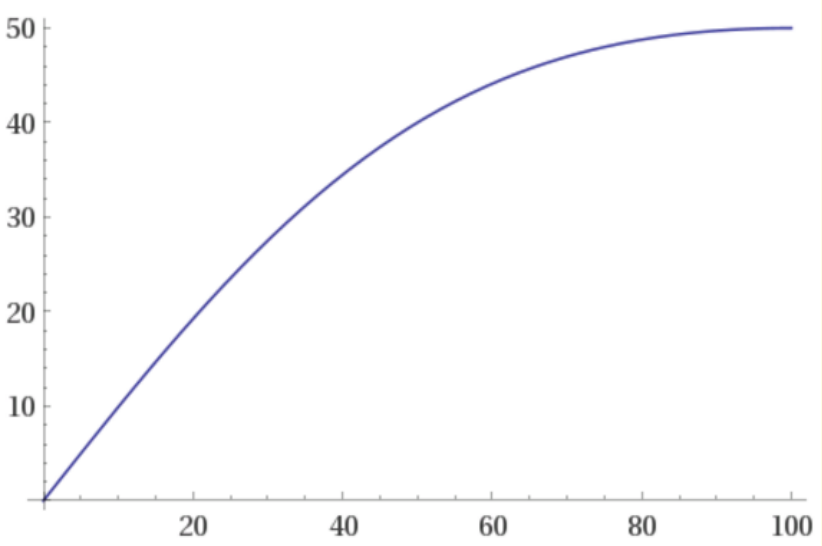
Ускорение: идеальное, линейное, реальное

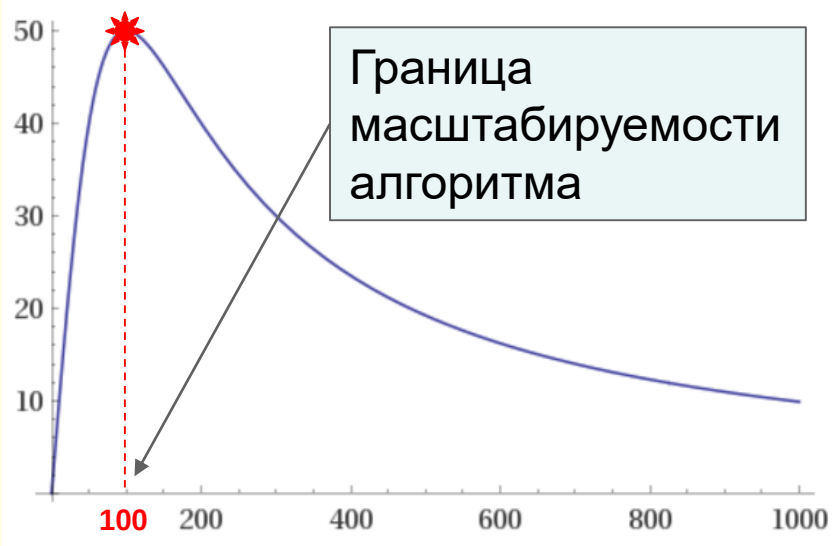


Ускорение реальной задачи на кластерной вычислительной системе









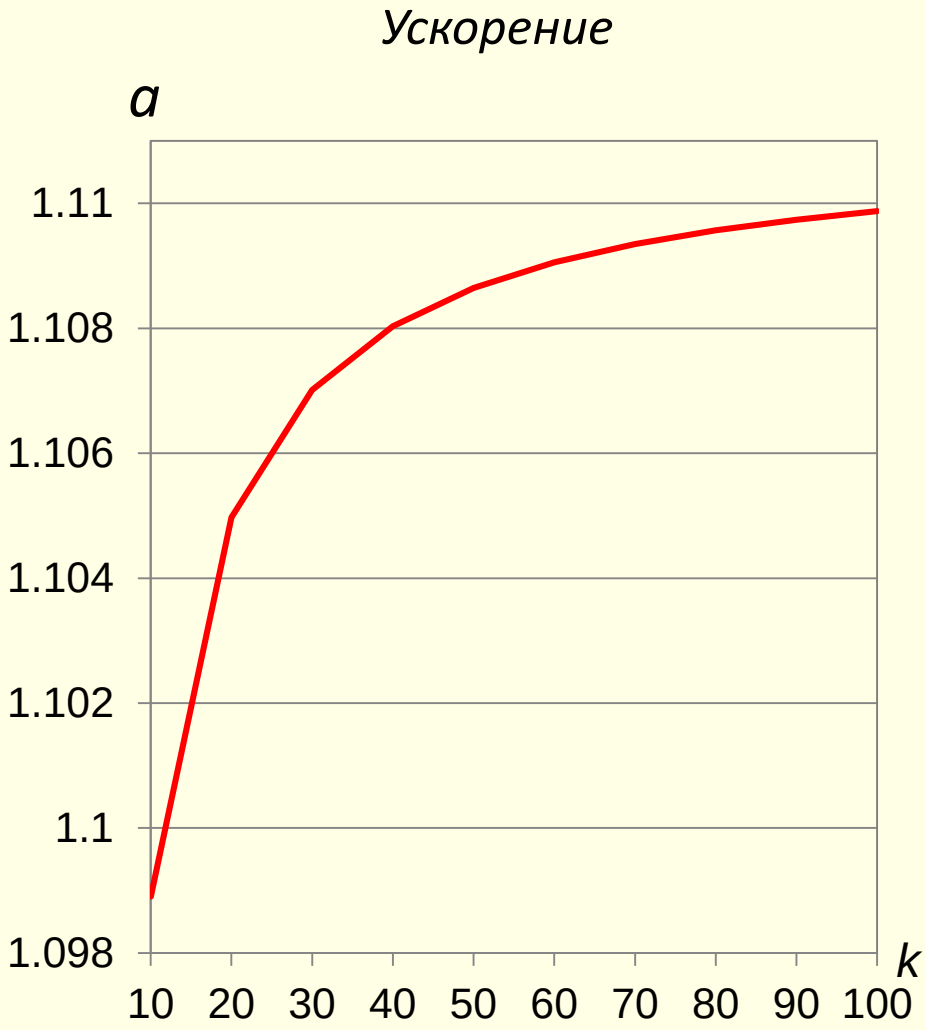
Параллельная эффективность

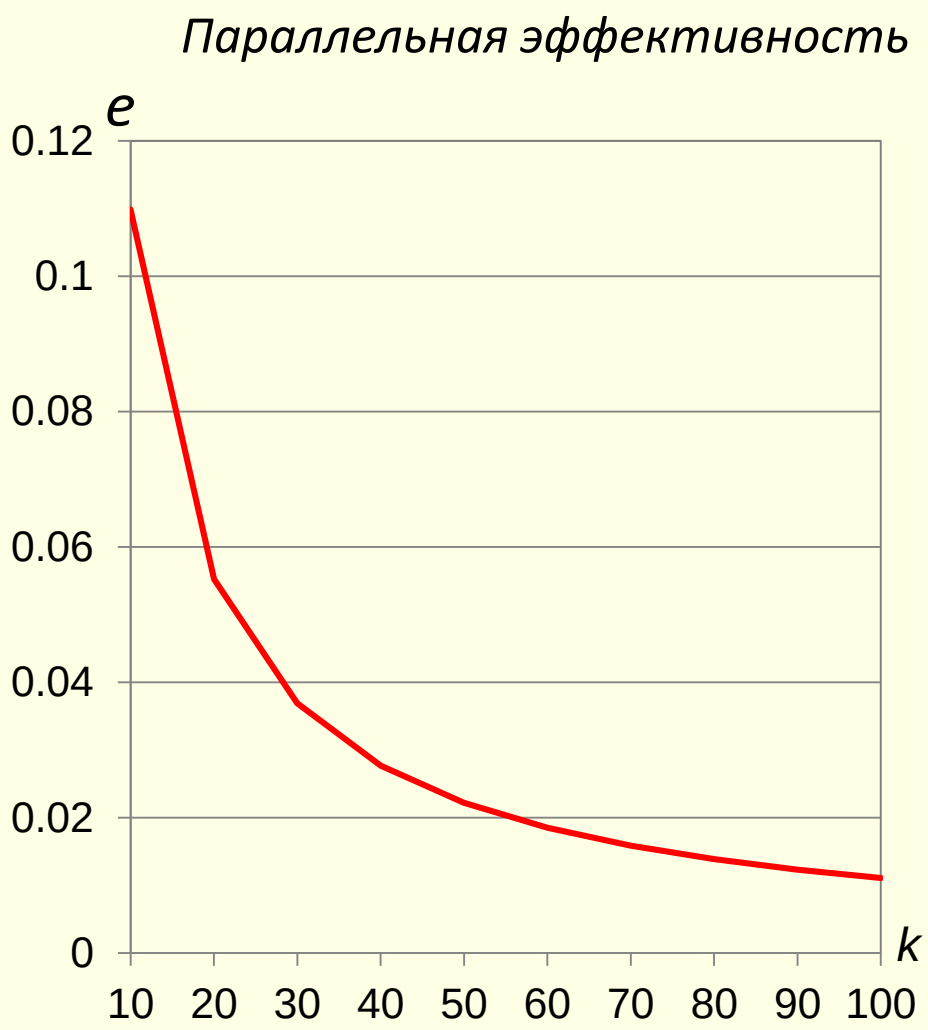
Ускорение

$$e(k) = \frac{a(k)}{k}$$

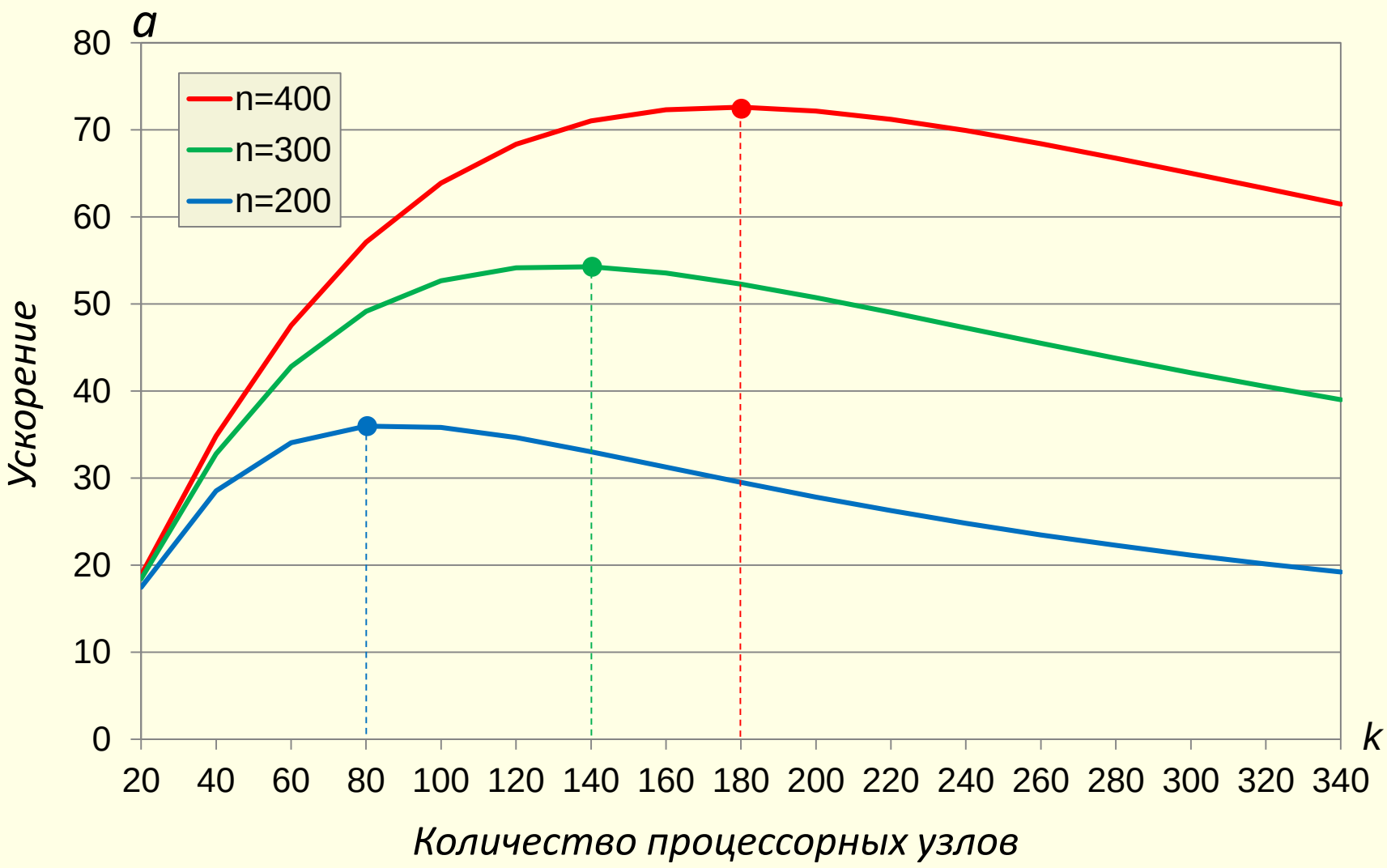
Количество узлов

10% параллельного кода



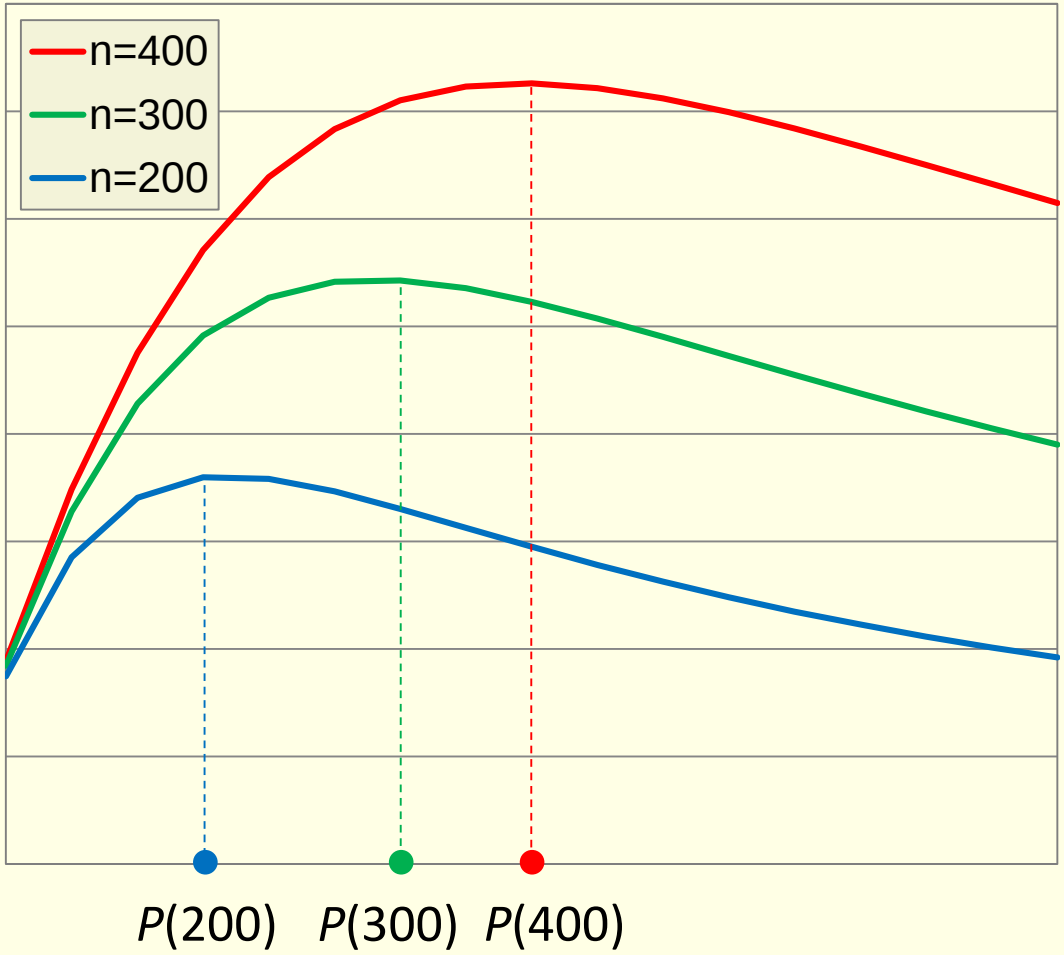


Размер задачи имеет значение!



Необходима формула для оценка масштабируемости алгоритма **до** написания программы

$$k = P(n)$$



Модель параллельных вычислений BSF

Модель BSF
(Bulk Synchronous Farm)

Схема программирования SPMD
(Single Program – Multiple Data)

Парадигма
«Мастер-рабочие»

Модель параллельных
вычислений BSP
(Bulk-Synchronous Parallelism)

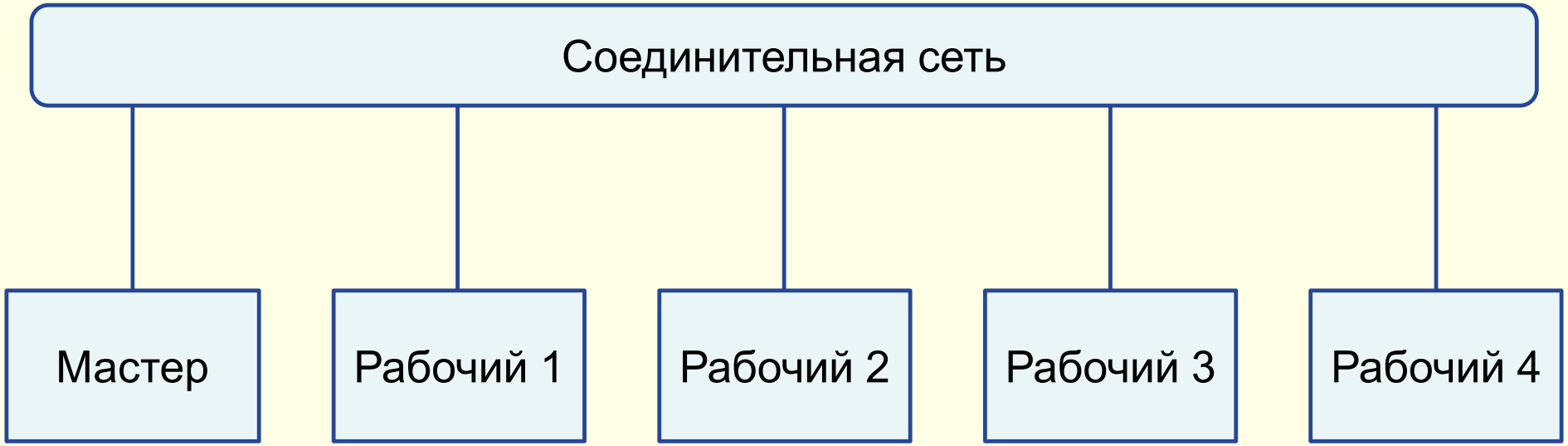
Область применения модели BSF

- Многопроцессорные системы с распределенной памятью
- Параллельные итерационные алгоритмы с высокой вычислительной сложностью

Модель BSF позволяет **предсказать**:

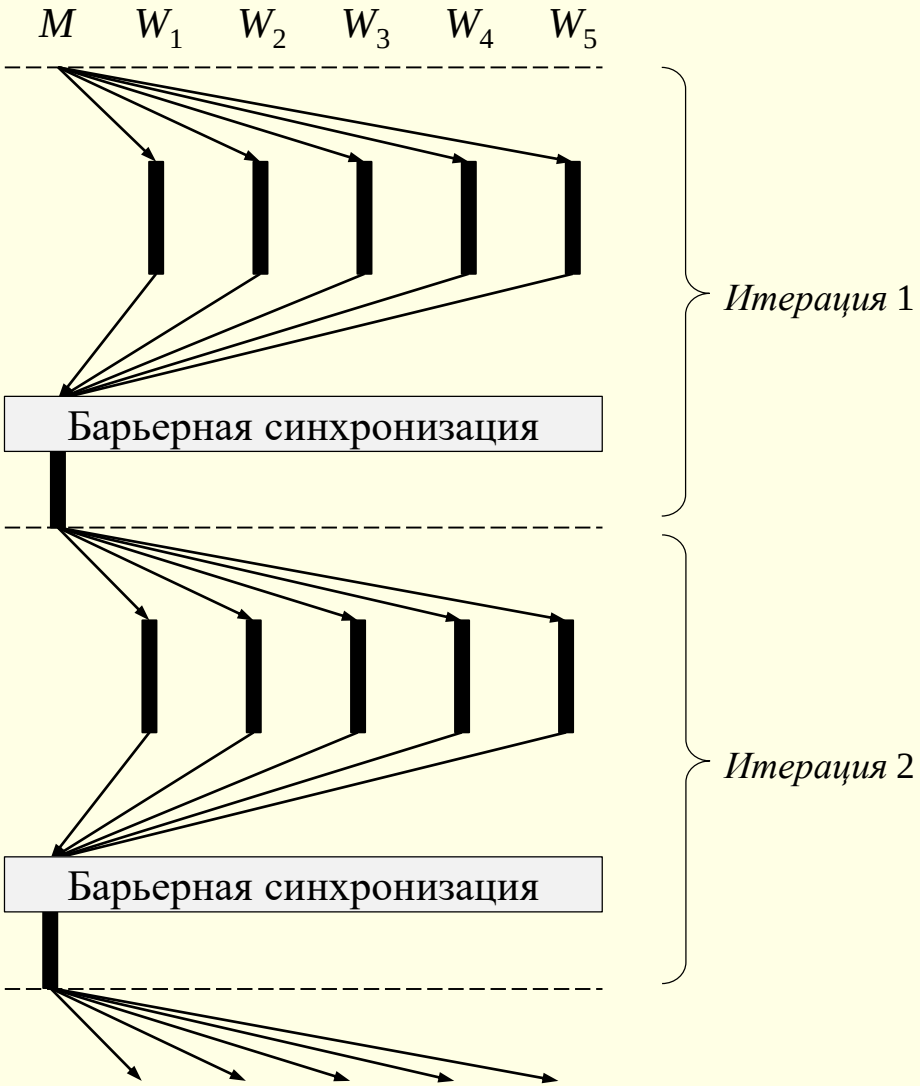
- границу масштабируемости параллельного алгоритма
- ускорение алгоритма
- параллельную эффективность алгоритма

BSF-компьютер



Процессорные узлы

Схема работы *BSF*-алгоритма



Параметры BSF-модели

t_s – время, необходимое для посылки сообщения одному рабочему

L – латентность (затраты на инициализацию операции передачи сообщения)

t_w – суммарное время всех вычислений, выполняемых рабочими в рамках одной итерации

t_r – время, необходимое для передачи результатов мастеру от рабочих

t_p – время обработки мастером результатов, полученных от рабочих

Граница масштабируемости BSF-алгоритма

Количество узлов

Суммарное время всех вычислений, выполняемых рабочими в рамках одной итерации

$$k \leq \sqrt{\frac{t_w}{2L + t_s}}$$

Время посылки сообщения одному рабочему

Латентность

Граница масштабируемости не зависит от:

t_r – время передачи результатов мастеру от рабочих

t_p – время обработки мастером результатов, полученных от рабочих

Ускорение BSF-алгоритма

$$a = \frac{k(2L + t_s + t_r + t_p + t_w)}{k^2(2L + t_s) + k(t_r + t_p) + t_w}$$

k – количество процессорных узлов

t_s – время посылки сообщения одному рабочему

L – латентность

t_w – время вычислений, выполняемых рабочими

t_r – время передачи результатов мастеру от рабочих

t_p – время обработки результатов, полученных от рабочих

Параллельная эффективность BSF-алгоритма

$$e = \frac{1}{1 + \left(k^2(2L + t_s) + k(t_r + t_p)\right)/t_w}$$

k – количество процессорных узлов

t_s – время для посылки сообщения одному рабочему

L – латентность

t_w – время вычислений, выполняемых рабочими

t_r – время передачи результатов мастеру от рабочих

t_p – время обработки результатов, полученных от рабочих

Применение модели BSF для исследования алгоритма NSLP

Нестационарная задача линейного программирования

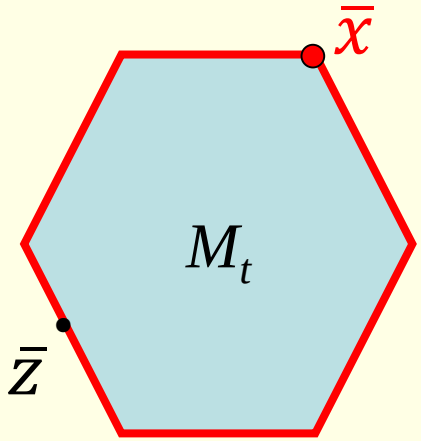
$$\max\{\langle c_t, x\rangle | A_t x \leq b_t, x \geq 0\}$$

- $x \in \mathbb{R}_n$
- A_t – матрица $m \times n$
- c_t, b_t – векторы размерности n
- $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ – время

Алгоритм NSLP (Non Stationary Linear Programming)

Фазы алгоритма:

- *Quest* – поиск точки $\bar{z} \in M_t$
- *Targeting* – перемещение точки $\bar{z}$ таким образом, чтобы точное решение $\bar{x}$ задачи ЛП находилось в ее ε-окрестности

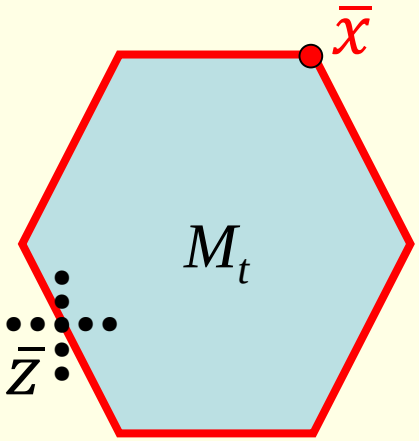


$$A_t x \leq b_t \Leftrightarrow x \in M_t$$

Алгоритм NSLP (Non Stationary Linear Programming)

Фазы алгоритма:

- *Quest* – поиск точки $\bar{z} \in M_t$
- *Targeting* – перемещение точки $\bar{z}$ таким образом, чтобы точное решение $\bar{x}$ задачи ЛП находилось в ее ε-окрестности



$$A_t x \leq b_t \Leftrightarrow x \in M_t$$

Граница масштабируемости BSF-реализации алгоритма NSLP

Меняются все элементы матрицы A:

$$k \leq O(\sqrt{n})$$

Меняется один элемент матрицы A:

$$k \leq O(n)$$

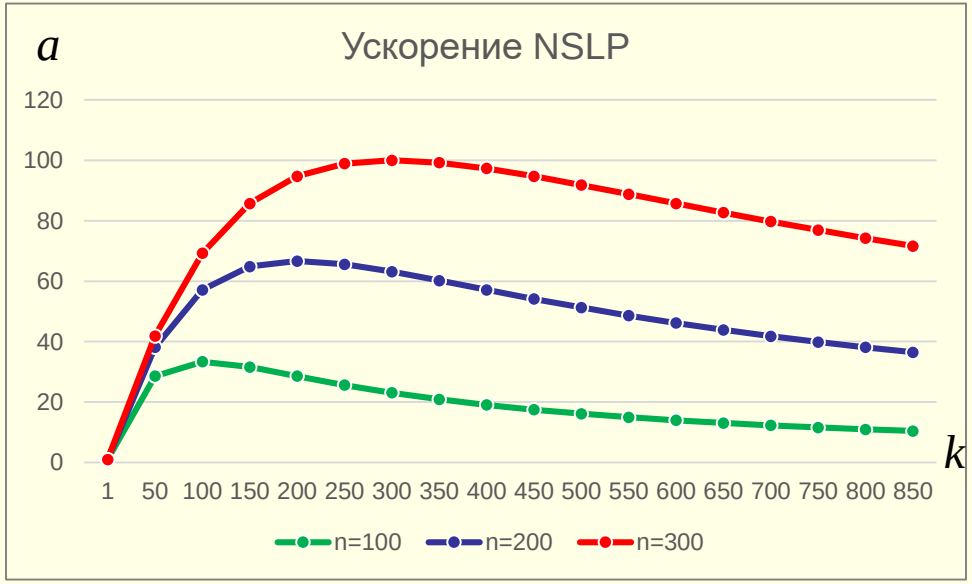
k – количество процессорных узлов

n – размерность задачи

Ускорение для BSF-реализации алгоритма NSLP

$$a = \frac{O(n^3)k}{O(n)k^2 + O(n^2)k + O(n^3)}$$

(меняется один элемент матрицы A)



k – количество процессорных узлов

n – размерность задачи

Параллельная эффективность BSF-реализации алгоритма NSLP

Меняются все элементы матрицы A:

$$e = \frac{1}{1 + k^2/O(n)}$$

Меняется один элемент матрицы A:

$$e = \frac{1}{1 + k^2/O(n^2) + k/O(n)}$$

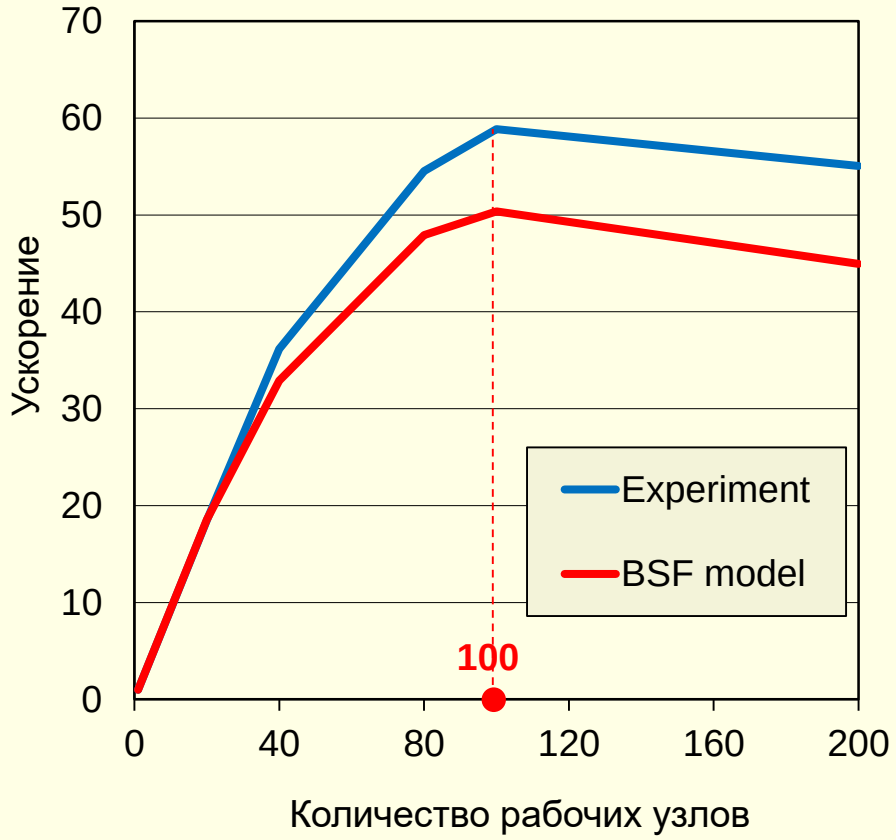
k – количество процессорных узлов

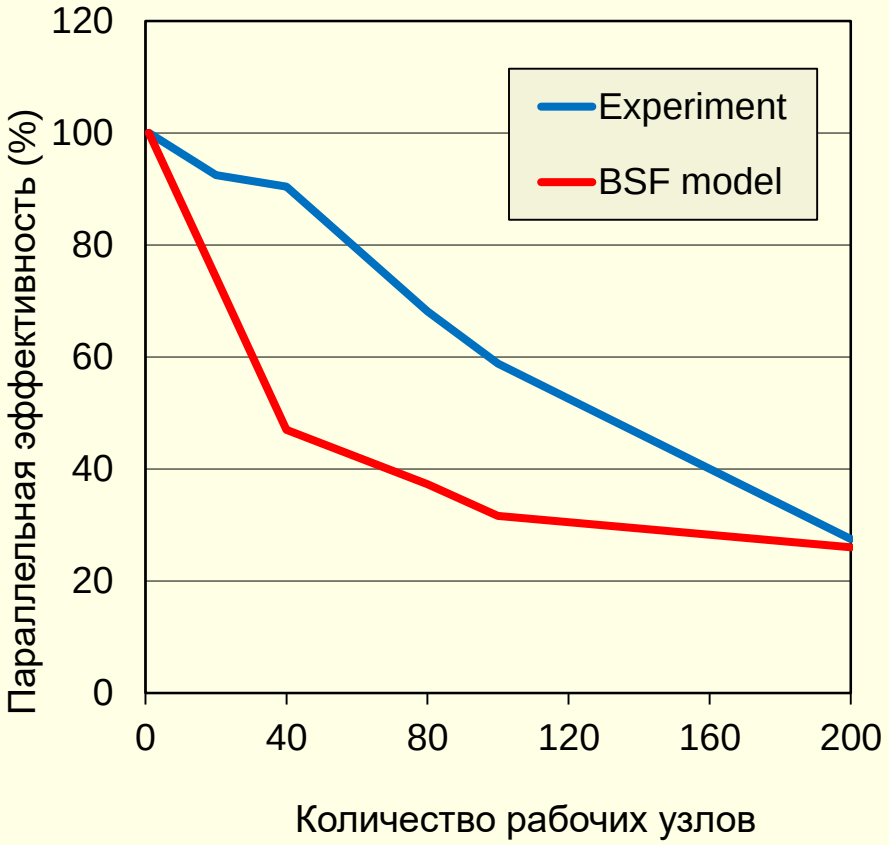
n – размерность задачи

BSF-реализация алгоритма NSLP на C++ и MPI

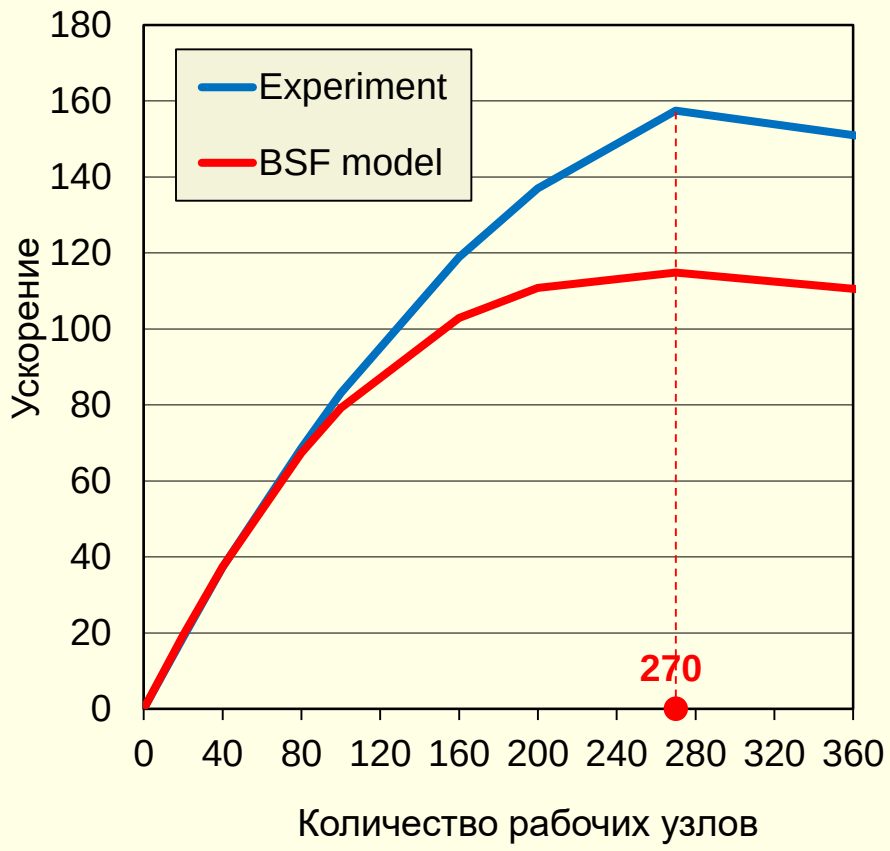
https://github.com/leonid-sokolinsky/BSF-NSLP

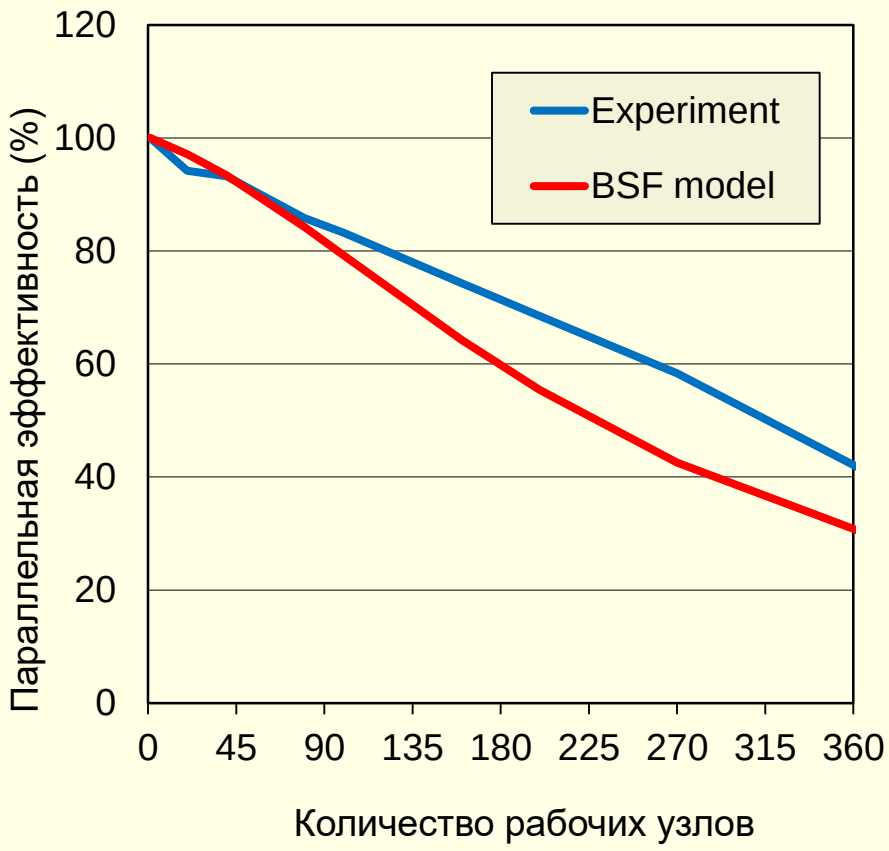
Сравнение теории с экспериментом (n = 400)



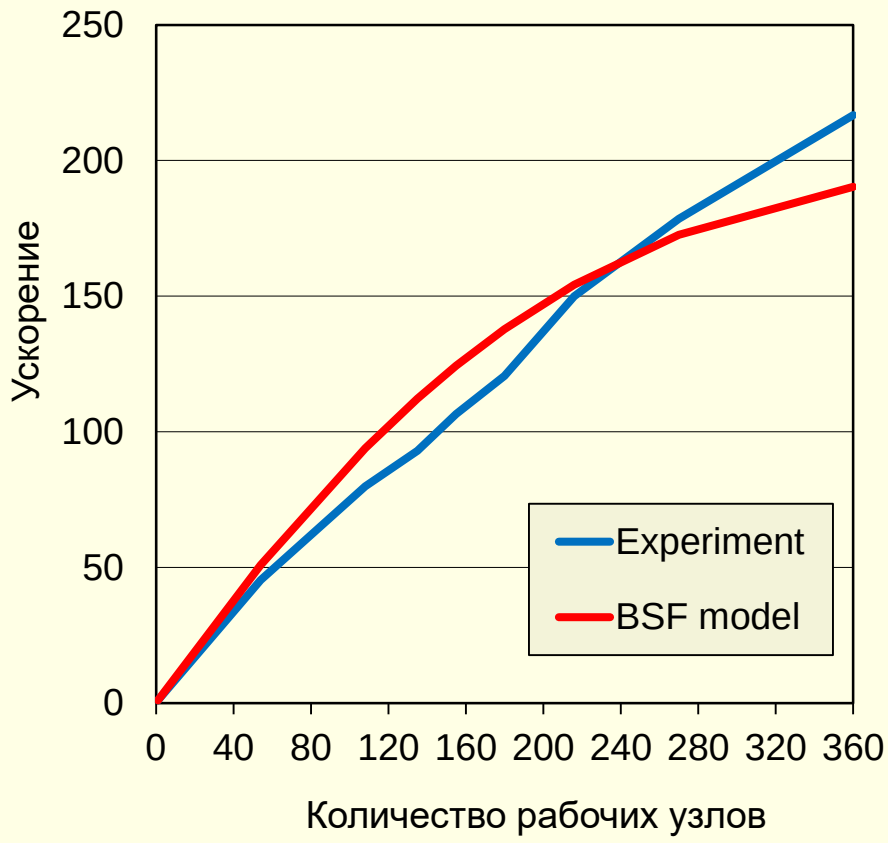


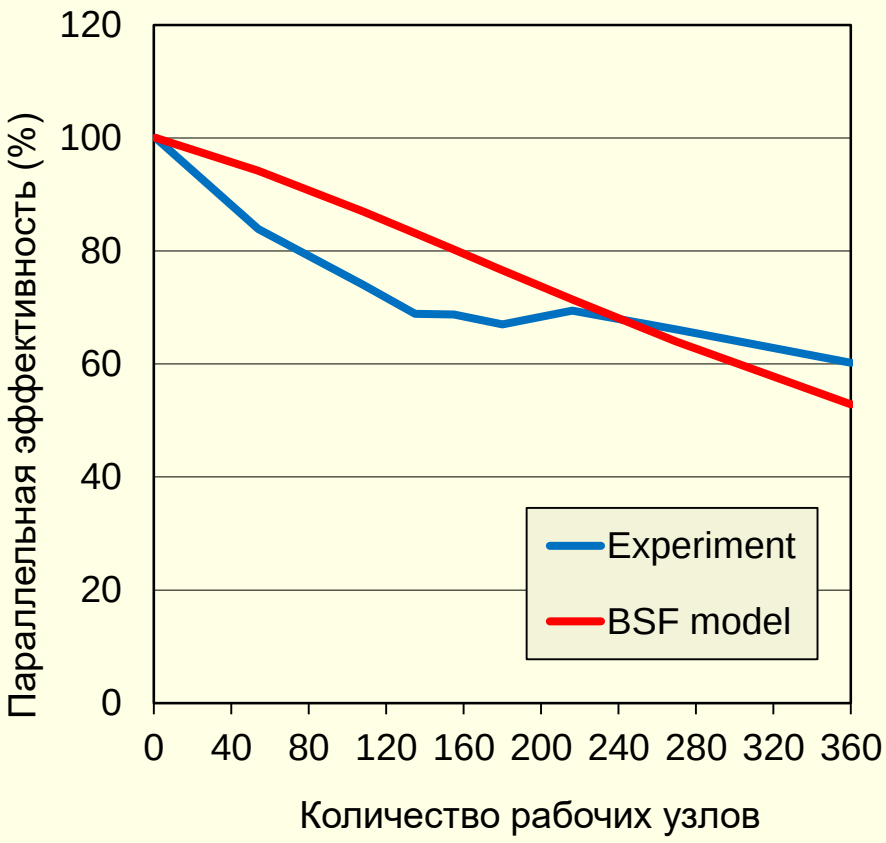
Сравнение теории с экспериментом (n = 800)





Сравнение теории с экспериментом (n = 1080)





Библиография

- *Sokolinsky L.B.* Analytical study of the “master-worker” framework scalability on multiprocessors with distributed memory [Electronic resource] // Submitted to “Parallel computational technologies (PCT) 2018”. arXiv:1704.05816 [cs.DC]. 2017. P. 15. (in Russian). http://arxiv.org/abs/1704.05816
- *Соколинская И.М., Соколинский Л.Б.* О решении задачи линейного программирования в эпоху больших данных // Параллельные вычислительные технологии – XI международная конференция, ПаВТ’2017, г. Казань, 3–7 апреля 2017 г. Короткие статьи и описания плакатов. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2017. С. 471-484. http://omega.sp.susu.ru/pavt2017/short/014.pdf
  Презентация доклада в формате PDF
- Sokolinskaya I., Sokolinsky L.B. Scalability Evaluation of NSLP Algorithm for Solving Non-Stationary Linear Programming Problems on Cluster Computing Systems [Electronic resource] // Submitted to “Russian Supercomputing Days 2017”. arXiv:1709.04640 [cs.DC]. 2017. http://arxiv.org/abs/1709.04640

Приглашаю к сотрудничеству авторов параллельных итерационных алгоритмов

- Помогу
  - сделать BSF-дизайн алгоритма
  - получить аналитические оценки масштабируемости
  - быстро разработать BSF-реализацию на C++ и MPI на основе готового BSF-каркаса
  - получить бесплатное время для проведения вычислительных экспериментов на суперкомпьютере «Торнадо-ЮУрГУ»
- Приглашу в соавторы научной статьи о модели BSF

Спасибо за внимание!

Вопросы?