

Модифицированный следящий алгоритм для решения нестационарных задач линейного программирования на кластерных вычислительных системах с многоядерными ускорителями

К.ф.-м.н. И.М. Соколинская, д.ф.-м.н. Л.Б. Соколинский,
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

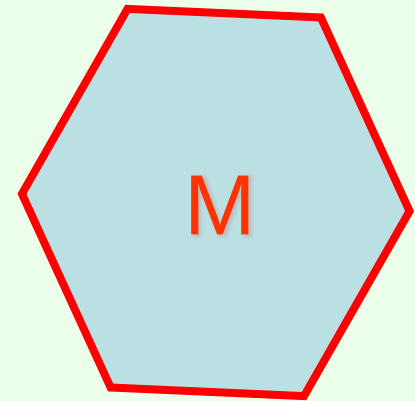
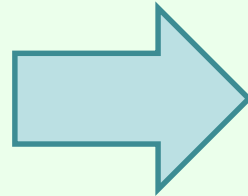
Нестационарная задача линейного программирования

$$\max \left\{ \langle c, x \rangle \mid Ax \leq b, x \geq 0 \right\}$$

- Размерность: 10^4 - 10^5
- Количество неравенств: 10^5 - 10^6
- Период изменения исходных данных (A,b,c): 10^{-2} - 10^{-3} сек.

Система ограничений

$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

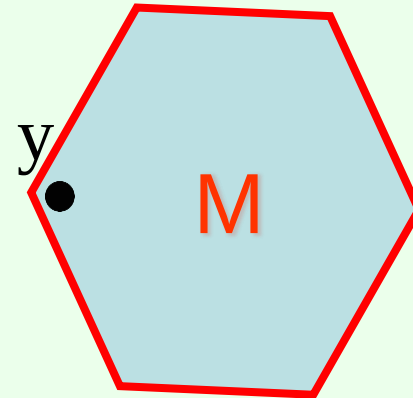
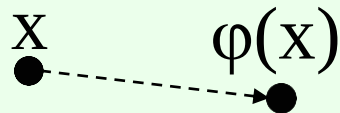


Фейеровское отображение

$\varphi \in \{R^n \rightarrow R^n\}$ – M -фейеровское, если

$$\varphi(y) = y, \quad \forall y \in M;$$

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|, \quad \forall y \in M, \quad \forall x \notin M.$$

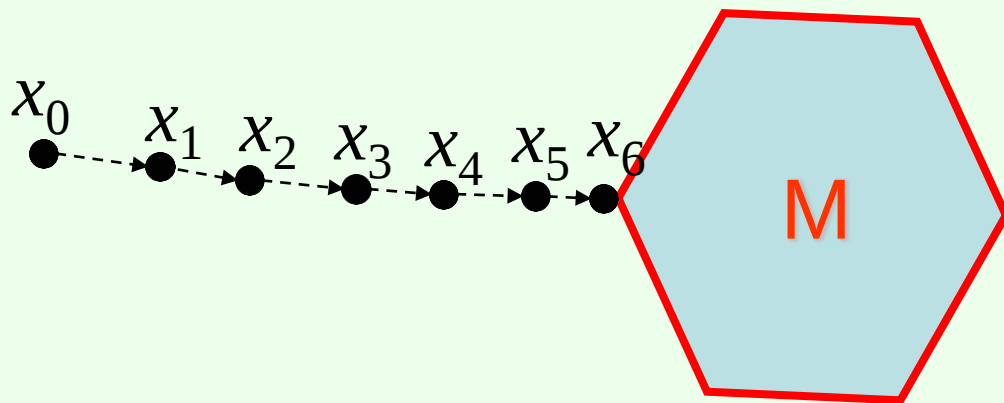


Фейеровский процесс

$$\varphi^s(x) = \underbrace{\varphi \dots \varphi(x)}_s$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^n$$

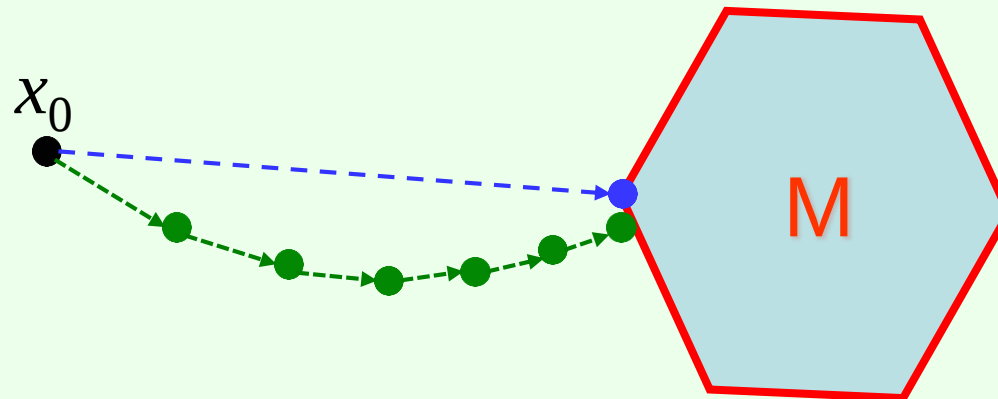
$$\{\varphi^s(x_0)\}_{s=0}^{+\infty}$$



$$x_i = \varphi^i(x_0)$$

Непрерывное однозначное M -фейеровское отображение сходится к точке, принадлежащей M (M - выпуклое ограниченное множество)

Псевдопроектирование



---> проектирование

---> псевдопроектирование

Псевдопроектирование (φ -проектирование)

$\varphi \in \mathbf{F}_M$ – однозначное непрерывное отображение.

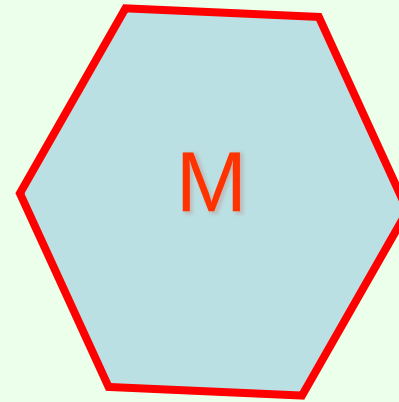
φ -проектирование (*псевдопроектирование*)

$x \in \mathbb{R}^n$ на M – это отображение $\pi_M^\varphi \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow M\}$:

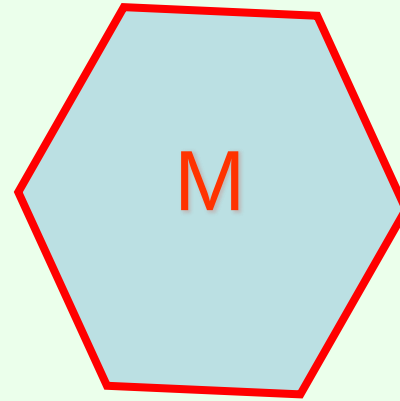
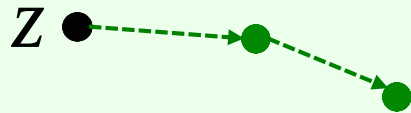
$$\pi_M^\varphi(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^s(x).$$

Точка $\pi_M^\varphi(x)$ – *псевдопроекция* точки x на M .

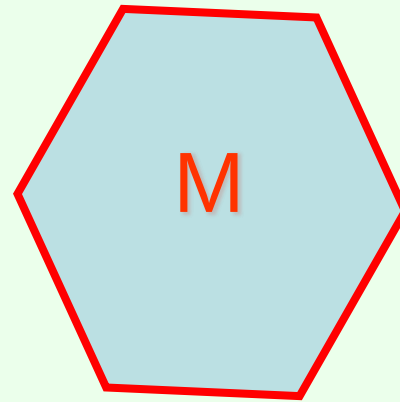
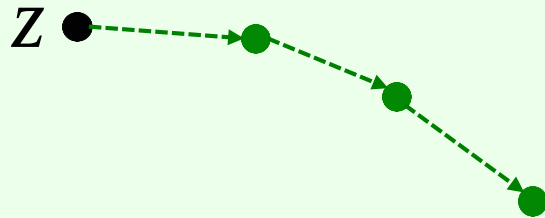
«Самонаведение» фейеровского отображения



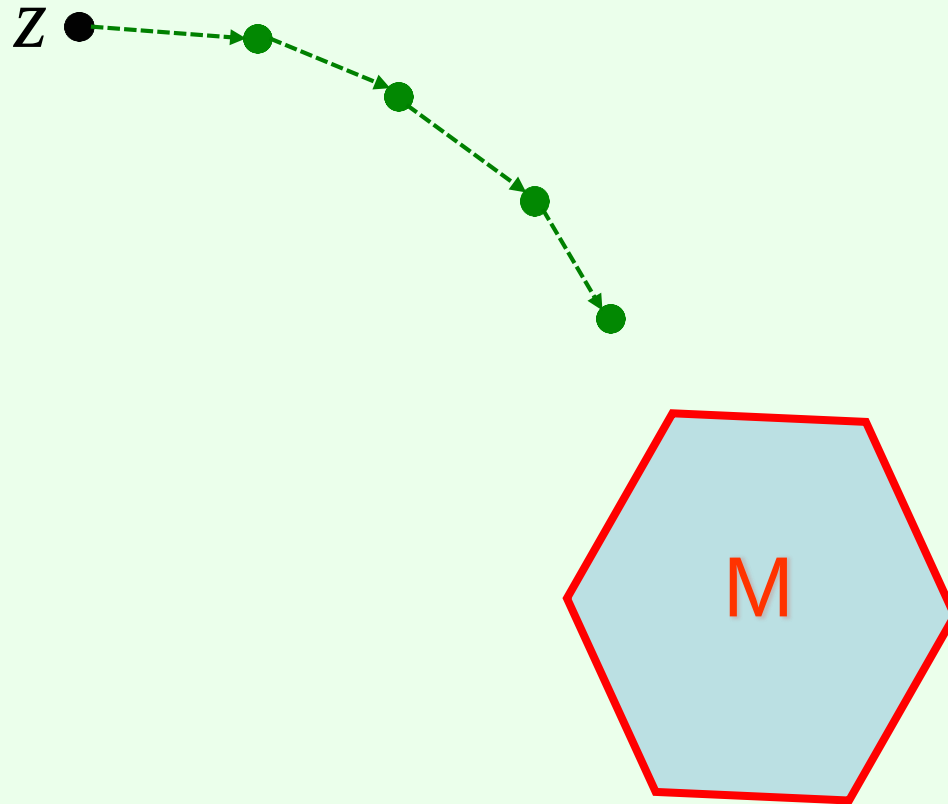
«Самонаведение» фейеровского отображения



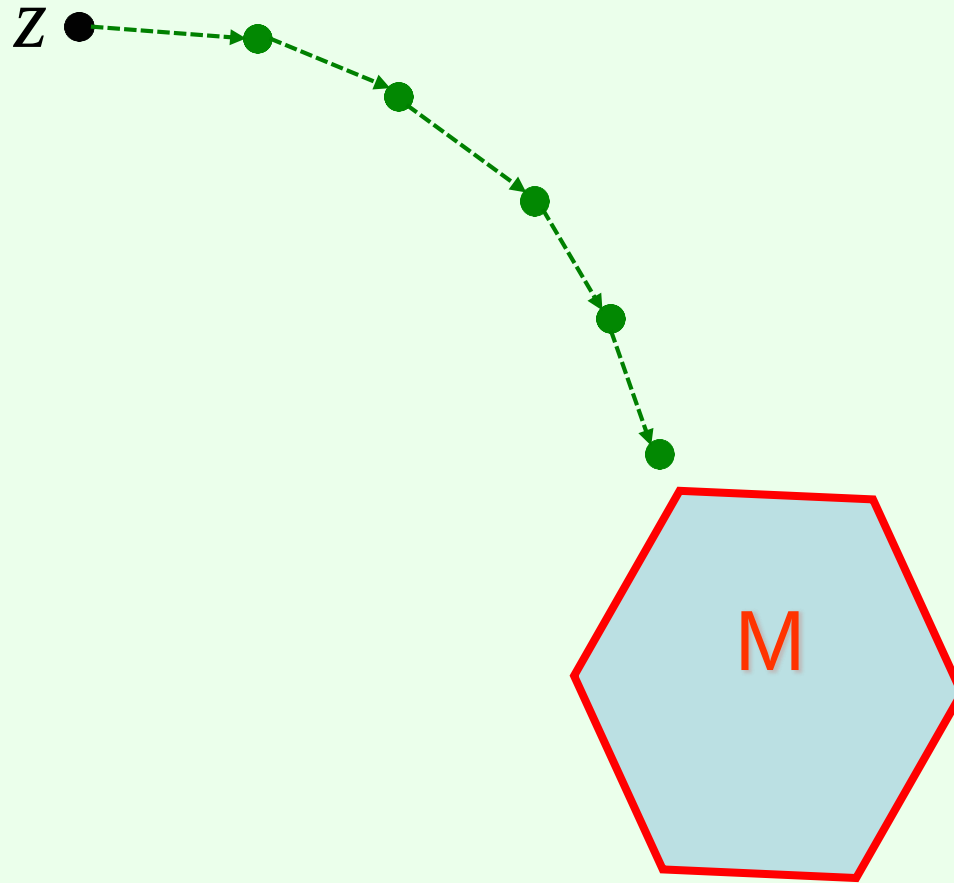
«Самонаведение» фейеровского отображения



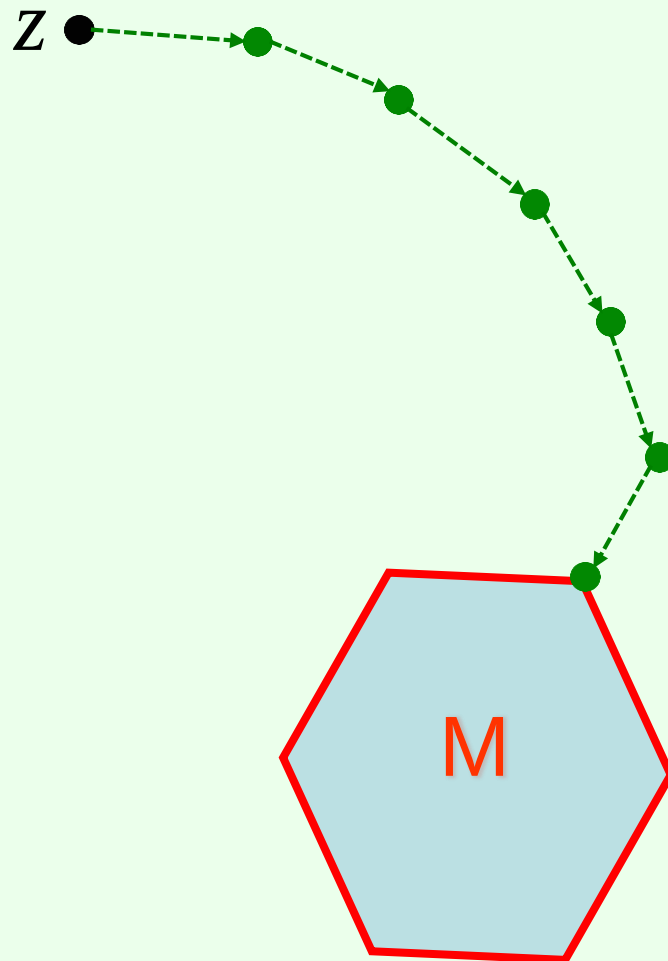
«Самонаведение» фейеровского отображения



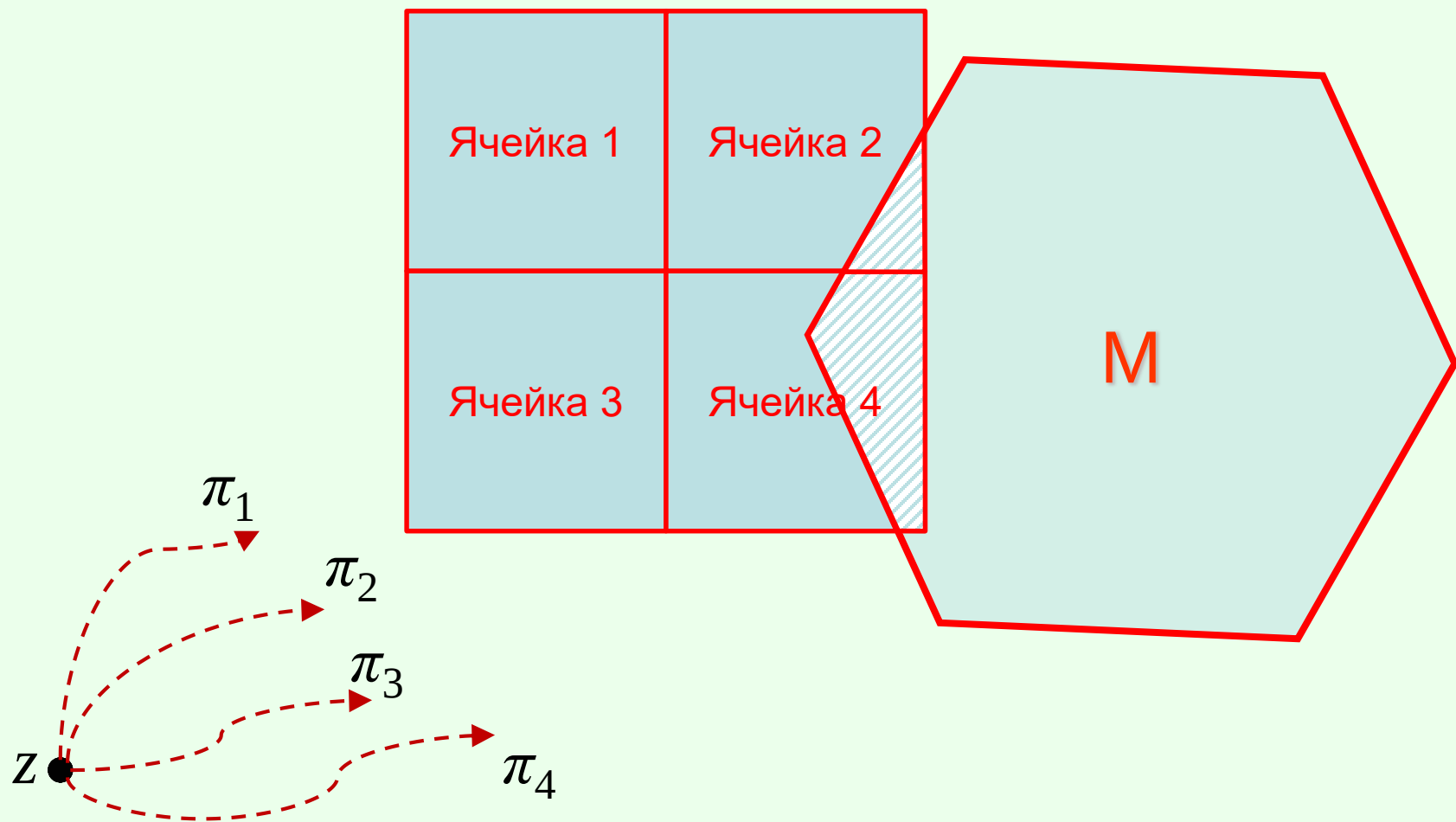
«Самонаведение» фейеровского отображения



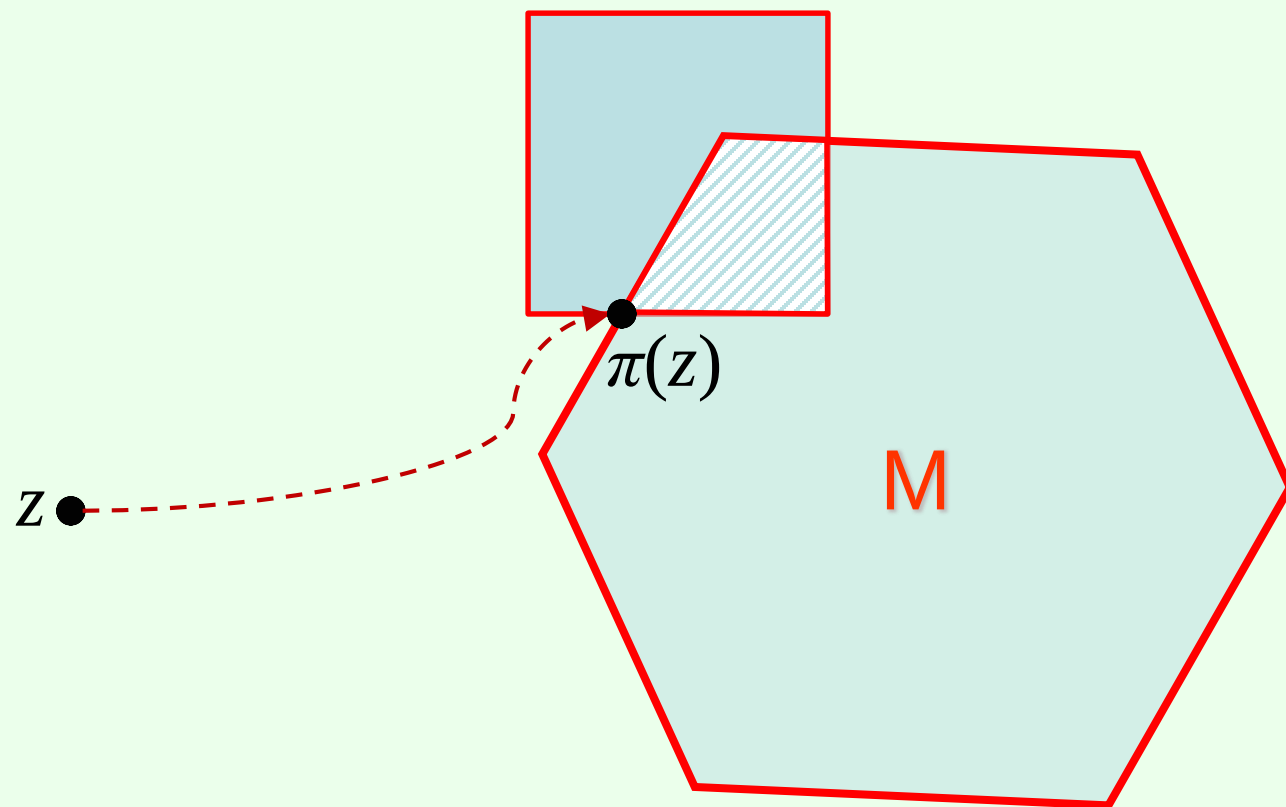
«Самонаведение» фейеровского отображения



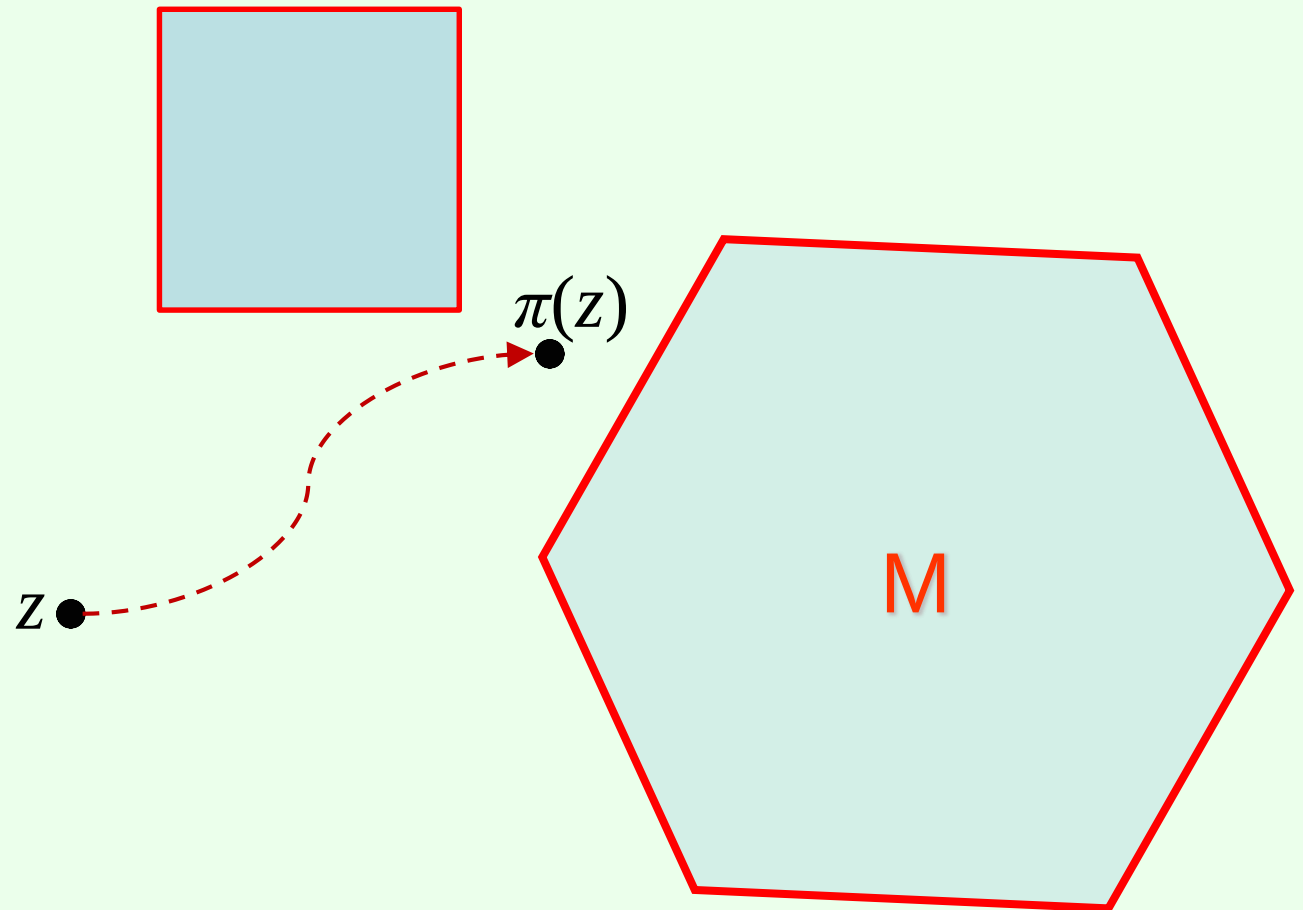
Идея следящего алгоритма



Поведение при непустом пересечении

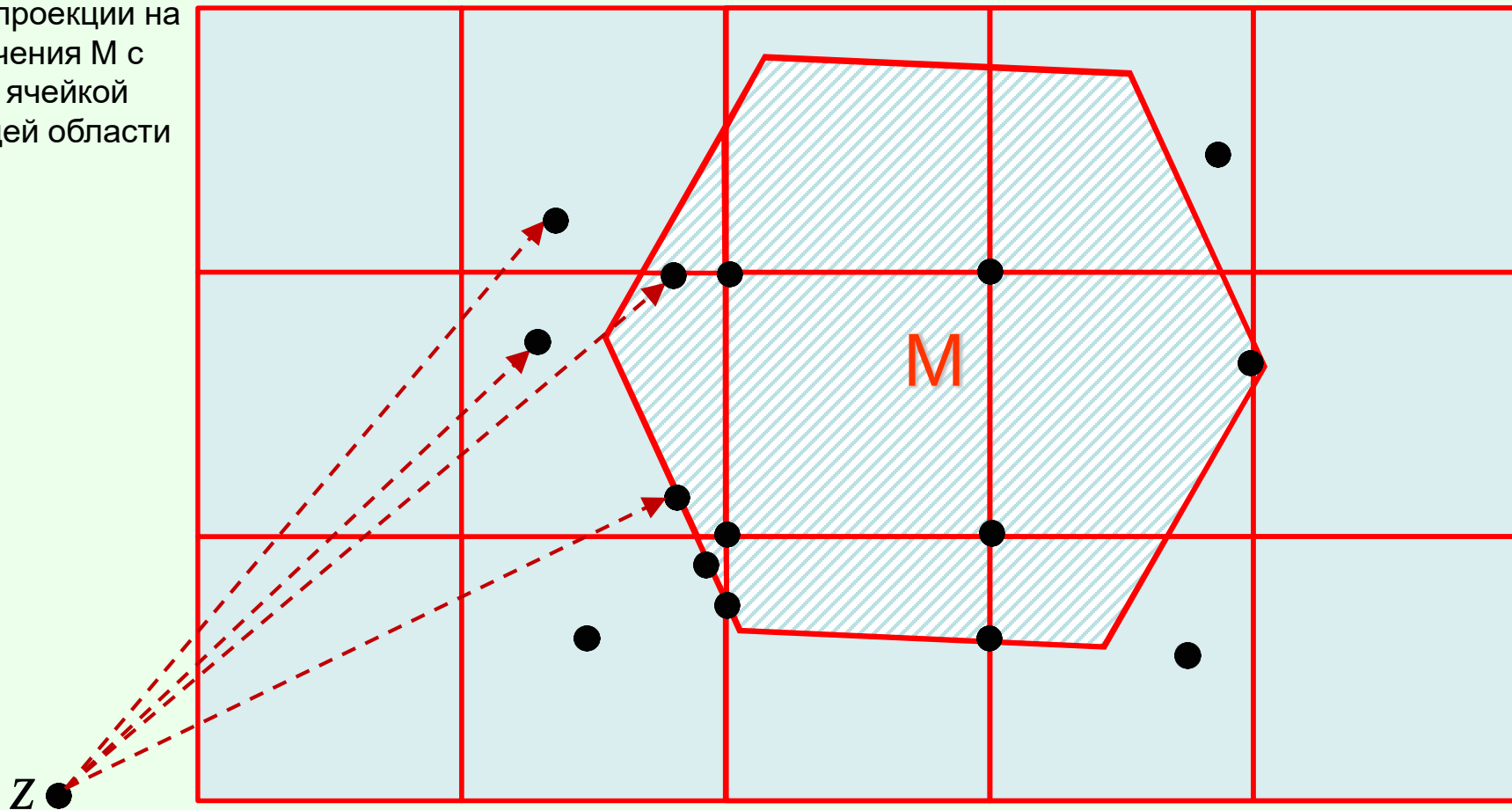


Поведение при пустом пересечении



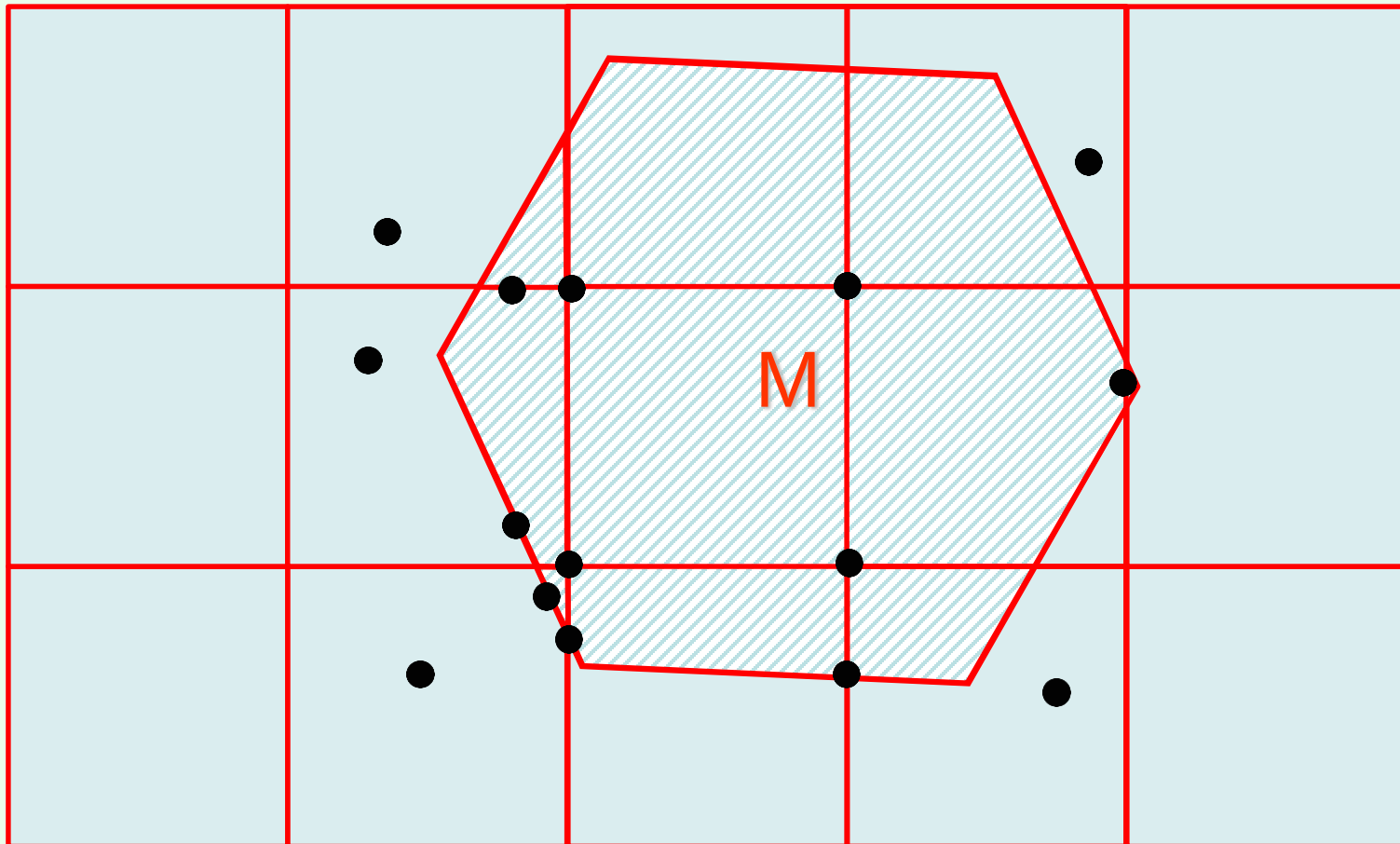
Построение точек псевдопроекций

1. Построить
псевдопроекции на
пересечения M с
каждой ячейкой
следящей области



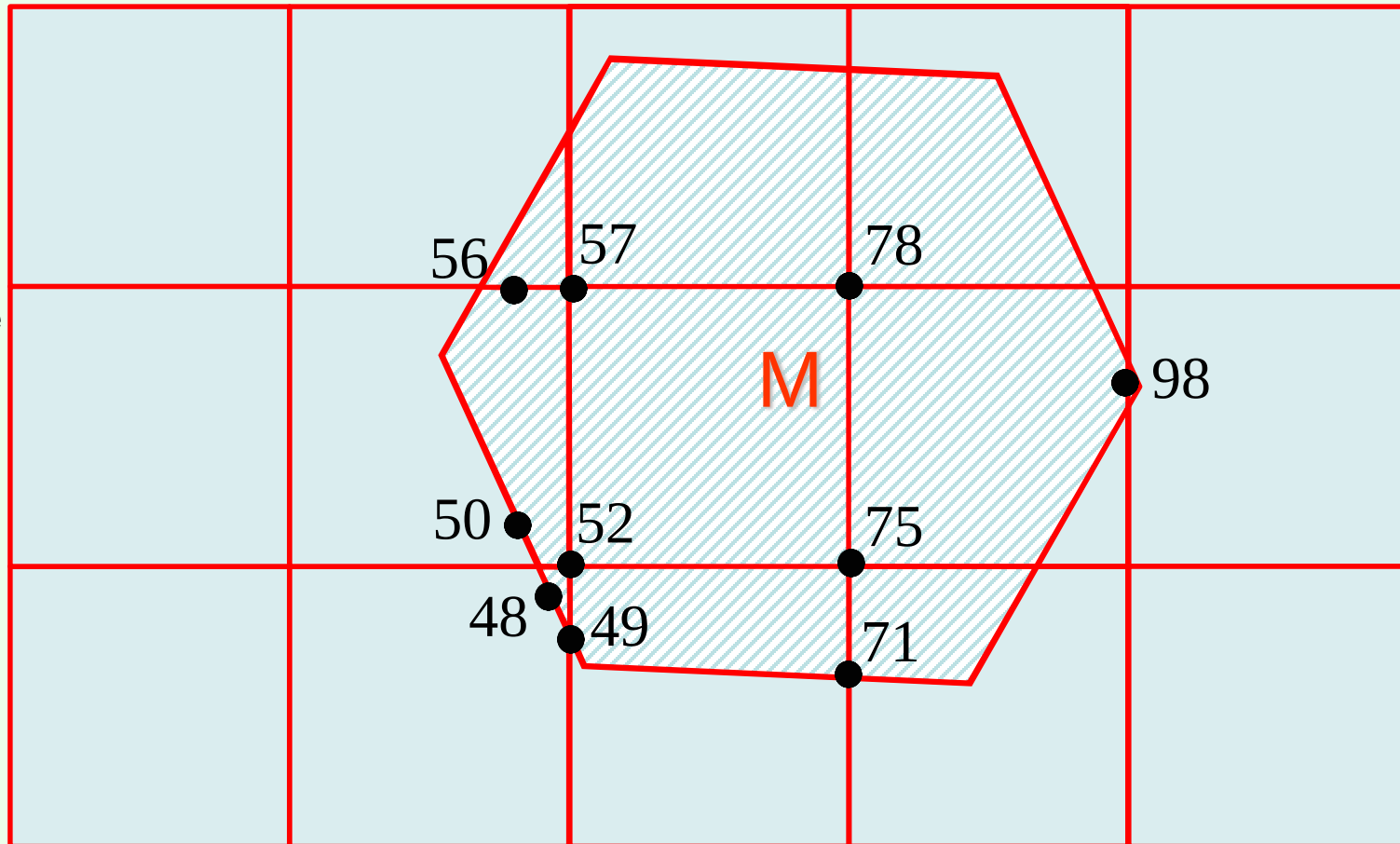
Выбраковка точек

1. Построить псевдопроекции на пересечения M с каждой ячейкой следящей области
2. Удалить из рассмотрения все точки псевдопроекций, не принадлежащие M



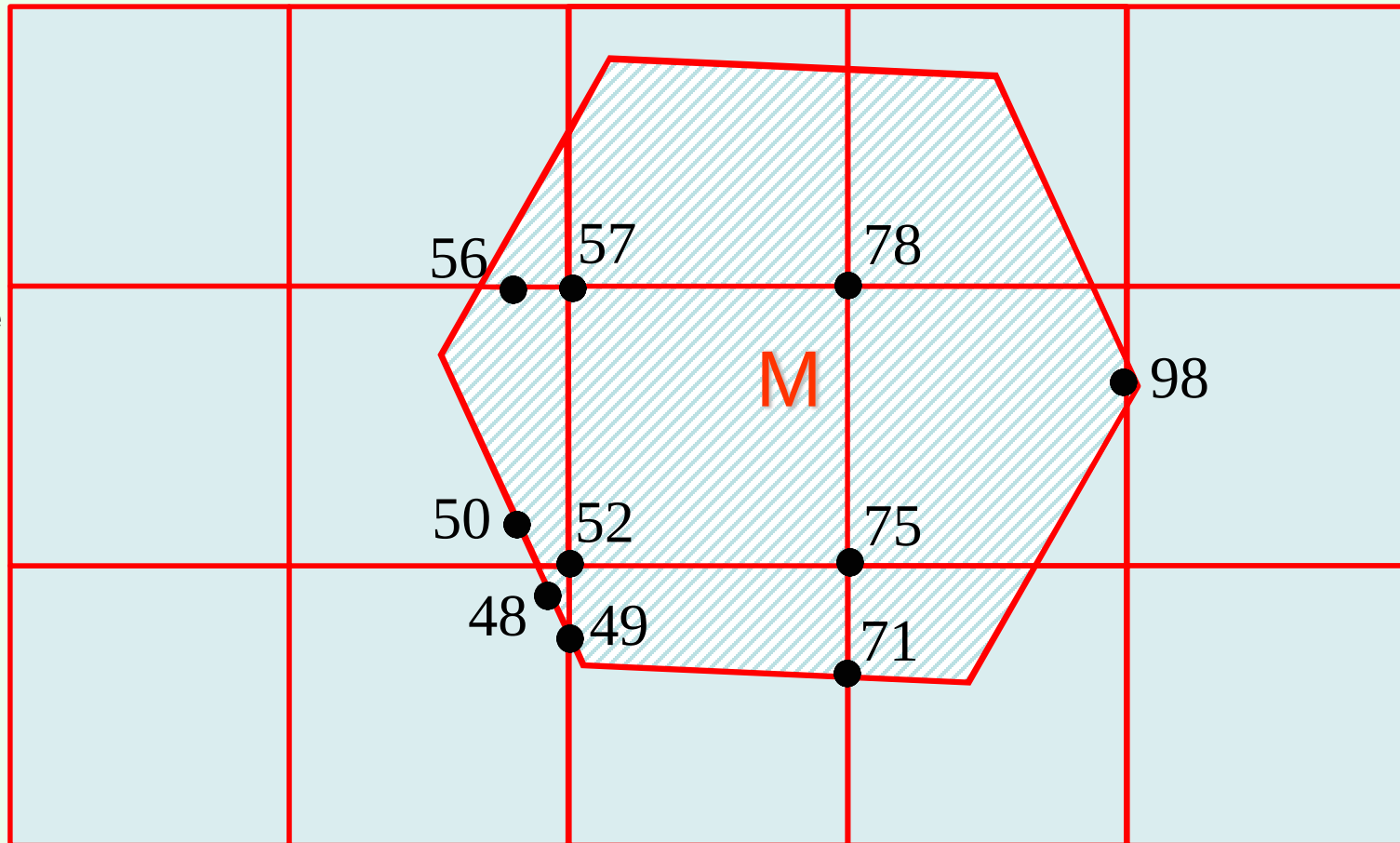
Найти значение целевой функции

1. Построить псевдопроекции на пересечения M с каждой ячейкой следящей области
2. Удалить из рассмотрения все точки псевдопроекций, не принадлежащие M
3. Для оставшихся точек найти значения целевой функции

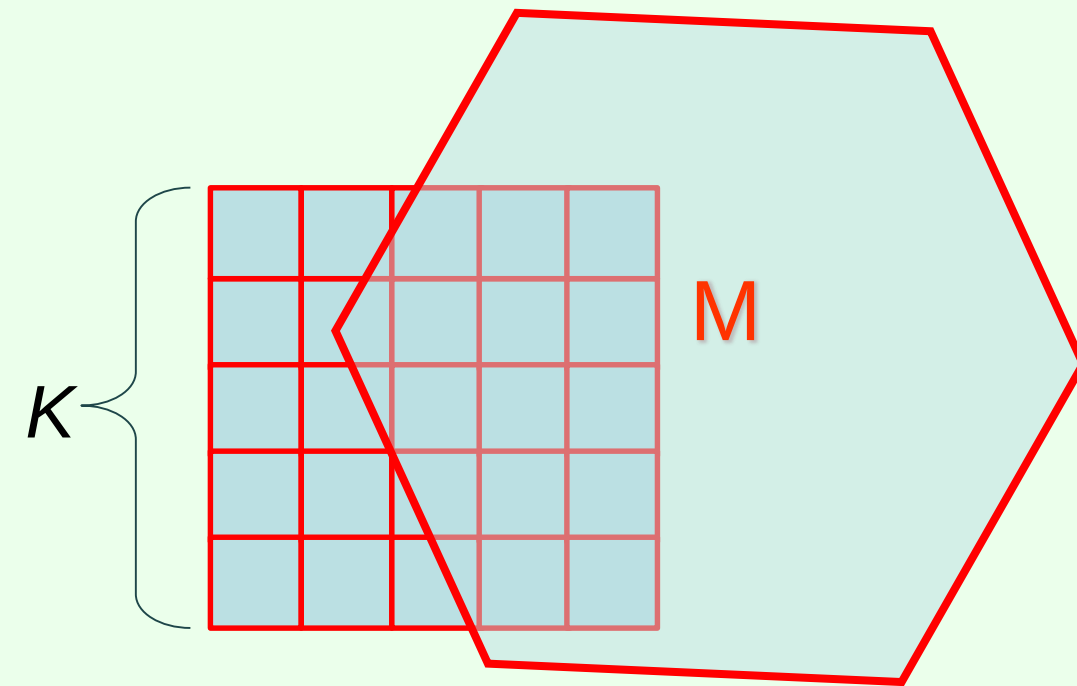


Выбрать максимум целевой функции

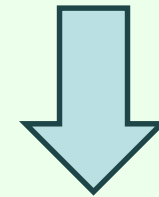
1. Построить псевдопроекции на пересечения M с каждой ячейкой следящей области
2. Удалить из рассмотрения все точки псевдопроекций, не принадлежащие M
3. Для оставшихся точек найти значения целевой функции
4. В качестве приближенного решения задачи ЛП выбрать точку с максимальным значением целевой функции



Проблема с кубической следящей областью

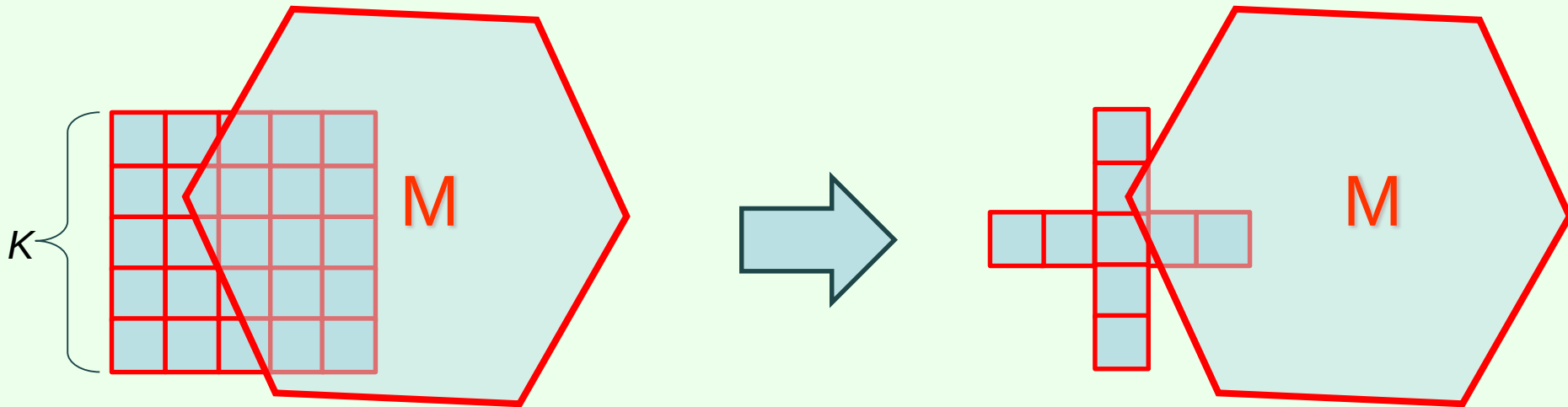


Общее
количество
ячеек равно K^n



Высокая
вычислительная
сложность!

Решение проблемы: переход к следящей области крестообразной формы

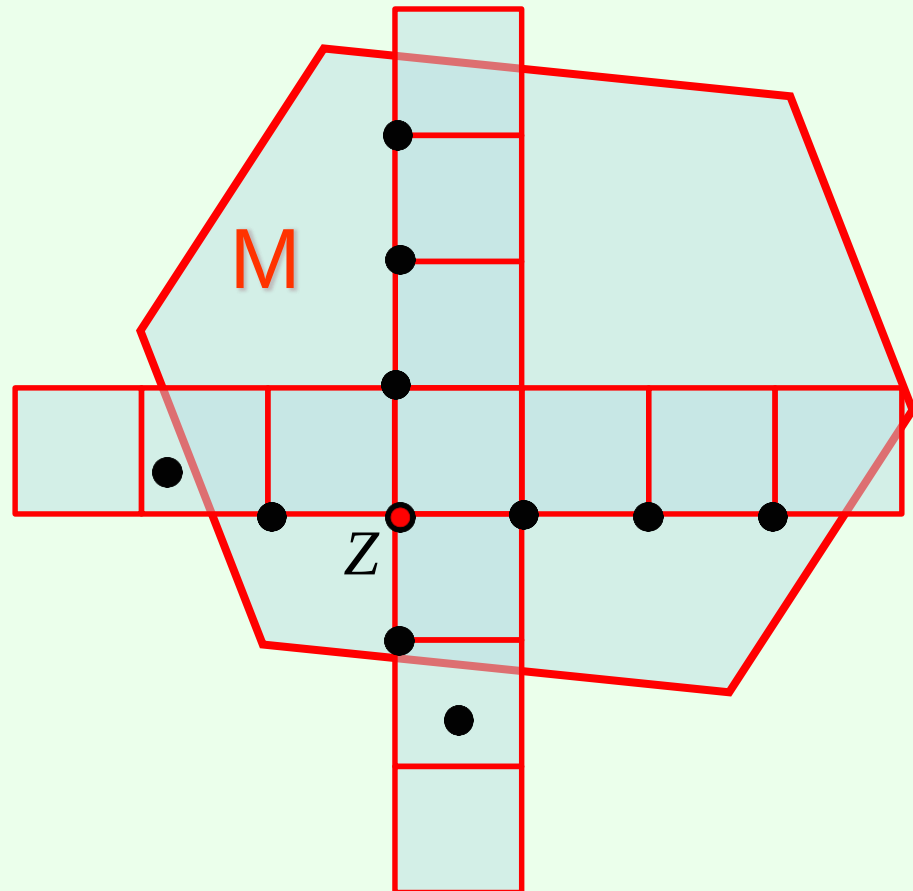


Общее количество
ячеек: K^n

Общее количество
ячеек: $n(K-1)+1$

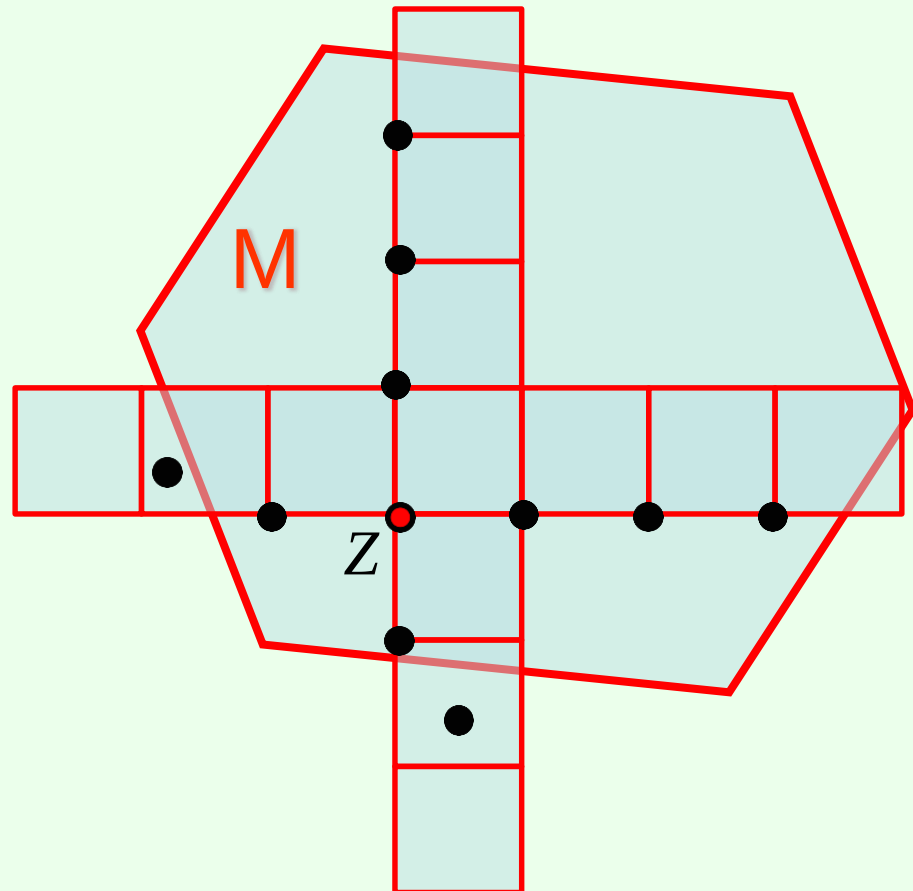
Модифицированный алгоритм

1. Построить псевдопроекции из нулевой вершины центральной ячейки Z на пересечения M с каждой ячейкой следящей области



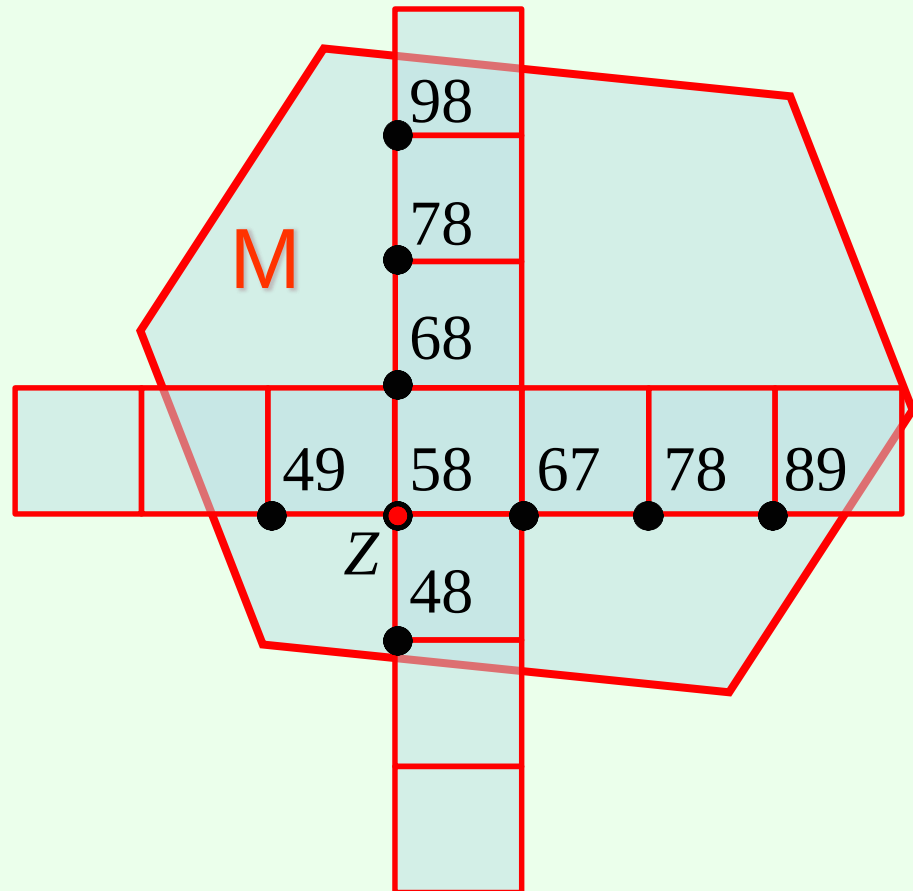
Модифицированный алгоритм

1. Построить псевдопроекции из нулевой вершины центральной ячейки Z на пересечения M с каждой ячейкой следящей области
2. Удалить из рассмотрения все точки псевдопроекций, не принадлежащие M



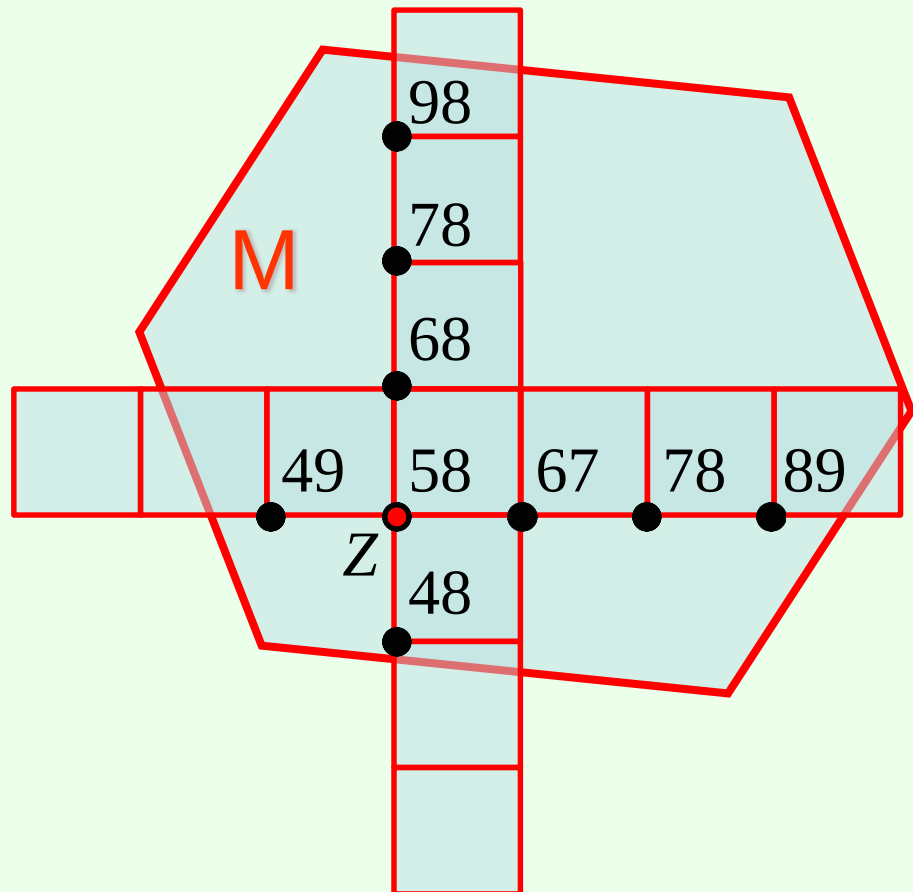
Модифицированный алгоритм

1. Построить псевдопроекции из нулевой вершины центральной ячейки Z на пересечения M с каждой ячейкой следящей области
2. Удалить из рассмотрения все точки псевдопроекции, не принадлежащие M
3. Для оставшихся точек найти значения целевой функции



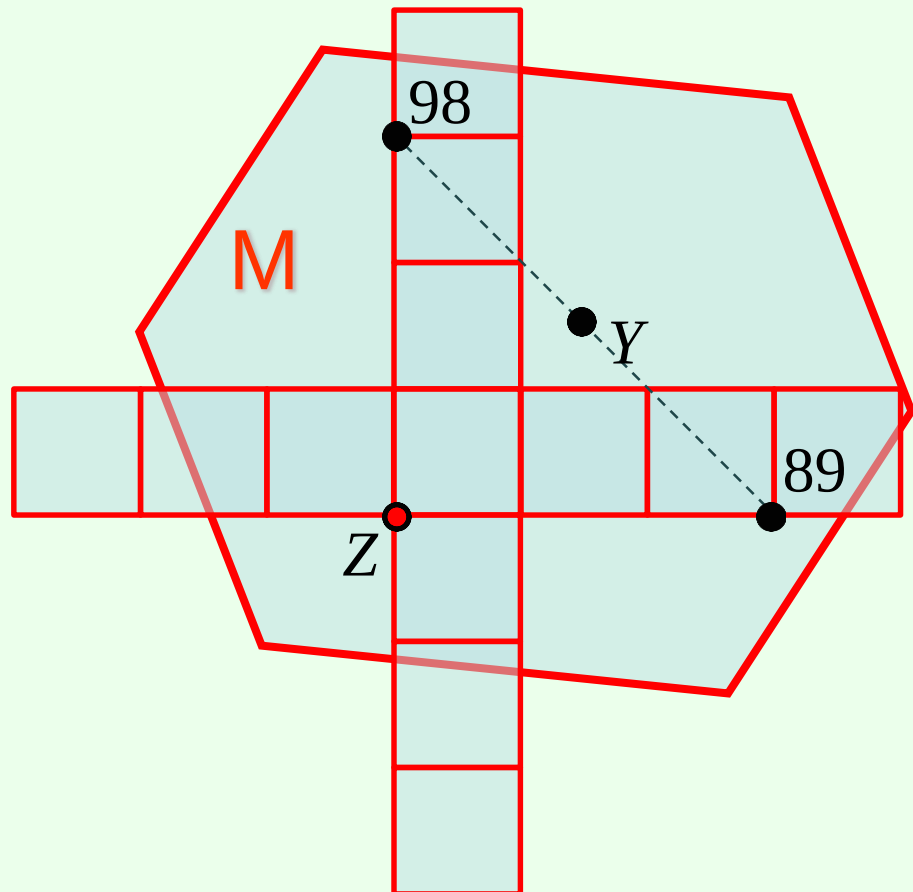
Модифицированный алгоритм

1. Построить псевдопроекции из нулевой вершины центральной ячейки Z на пересечения M с каждой ячейкой следящей области
2. Удалить из рассмотрения все точки псевдопроекции, не принадлежащие M
3. Для оставшихся точек найти значения целевой функции
4. Найти максимум целевой функции по каждому лучу



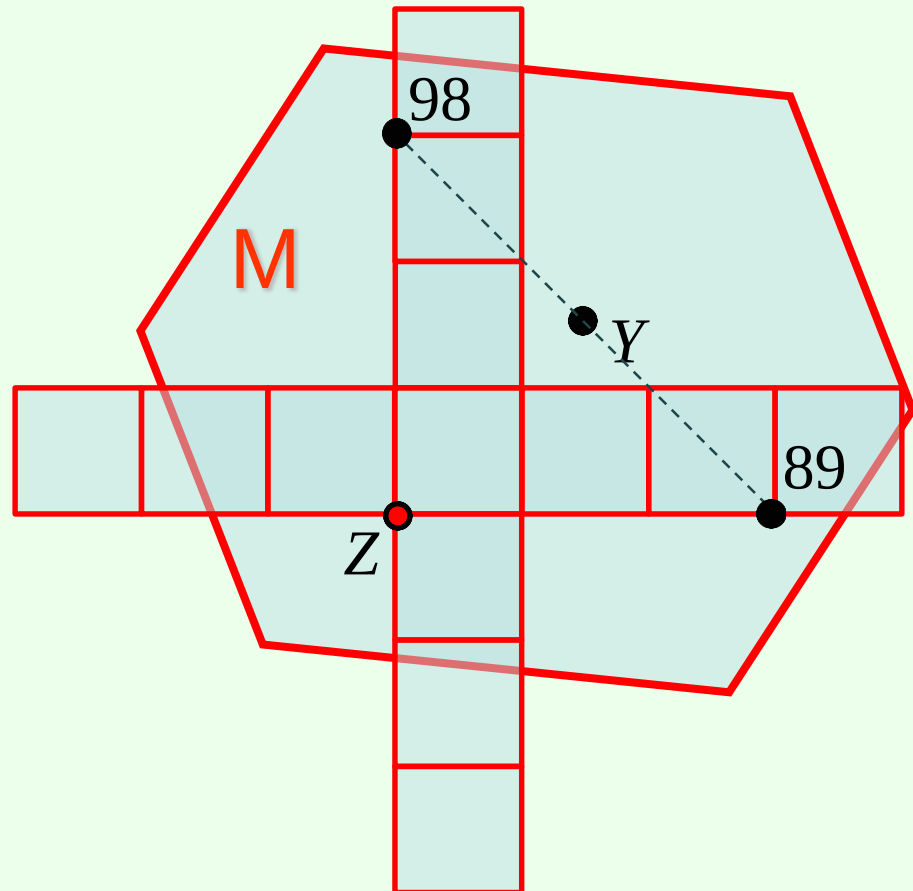
Модифицированный алгоритм

1. Построить псевдопроекции из нулевой вершины центральной ячейки Z на пересечения M с каждой ячейкой следящей области
2. Удалить из рассмотрения все точки псевдопроекции, не принадлежащие M
3. Для оставшихся точек найти значения целевой функции
4. Найти максимум целевой функции по каждому лучу
5. Найти центр масс Y точек-максимумов



Модифицированный алгоритм

1. Построить псевдопроекции из нулевой вершины центральной ячейки Z на пересечения M с каждой ячейкой следящей области
2. Удалить из рассмотрения все точки псевдопроекции, не принадлежащие M
3. Для оставшихся точек найти значения целевой функции
4. Найти максимум целевой функции по каждому лучу
5. Найти центр масс Y точек-максимумов
6. Сдвинуть следящую область на вектор $Y-Z$
7. В качестве текущего приближения задачи ЛП выбрать точку Y



Вычисление псевдопроекций на сопроцессоре Intel Xeon Phi

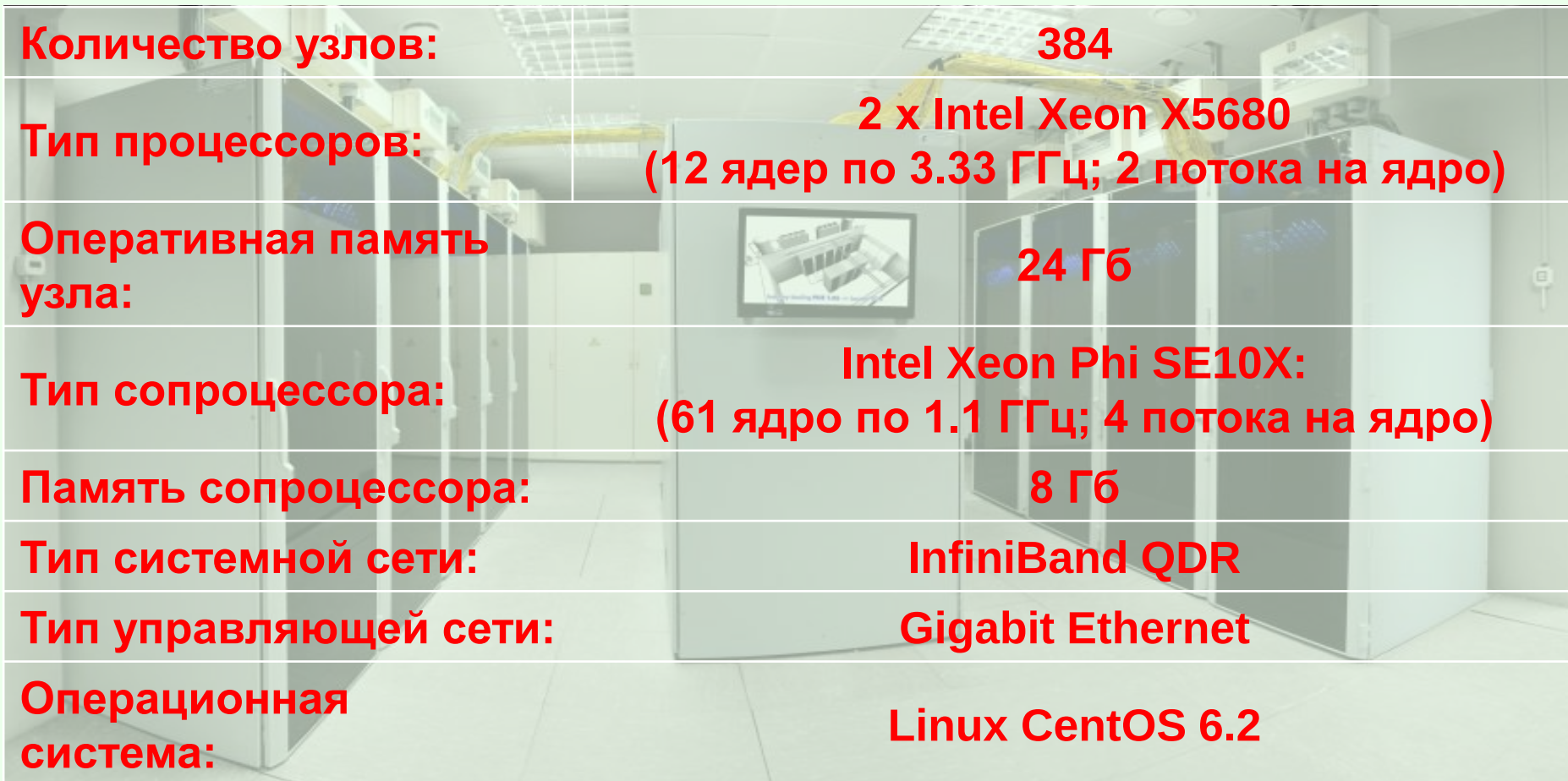
- Псевдопроектирование - наиболее трудоемкая операция
- Можно ли использовать сопроцессор Intel Xeon Phi для ускорения вычисления псевдопроекции?

Масштабируемая задача ЛП

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 x_0 & \leq 200 \\
 & x_1 \leq 200 \\
 & \quad \ddots \quad \dots \quad \dots \\
 & & x_{n-1} \leq 200 \\
 x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} & \leq 200(n-1) + 100 \\
 x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} & \geq 100 \\
 x_0 & \geq 0 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & \quad \ddots \quad \dots \quad \dots \\
 & & x_{n-1} \geq 0
 \end{array} \right.$$

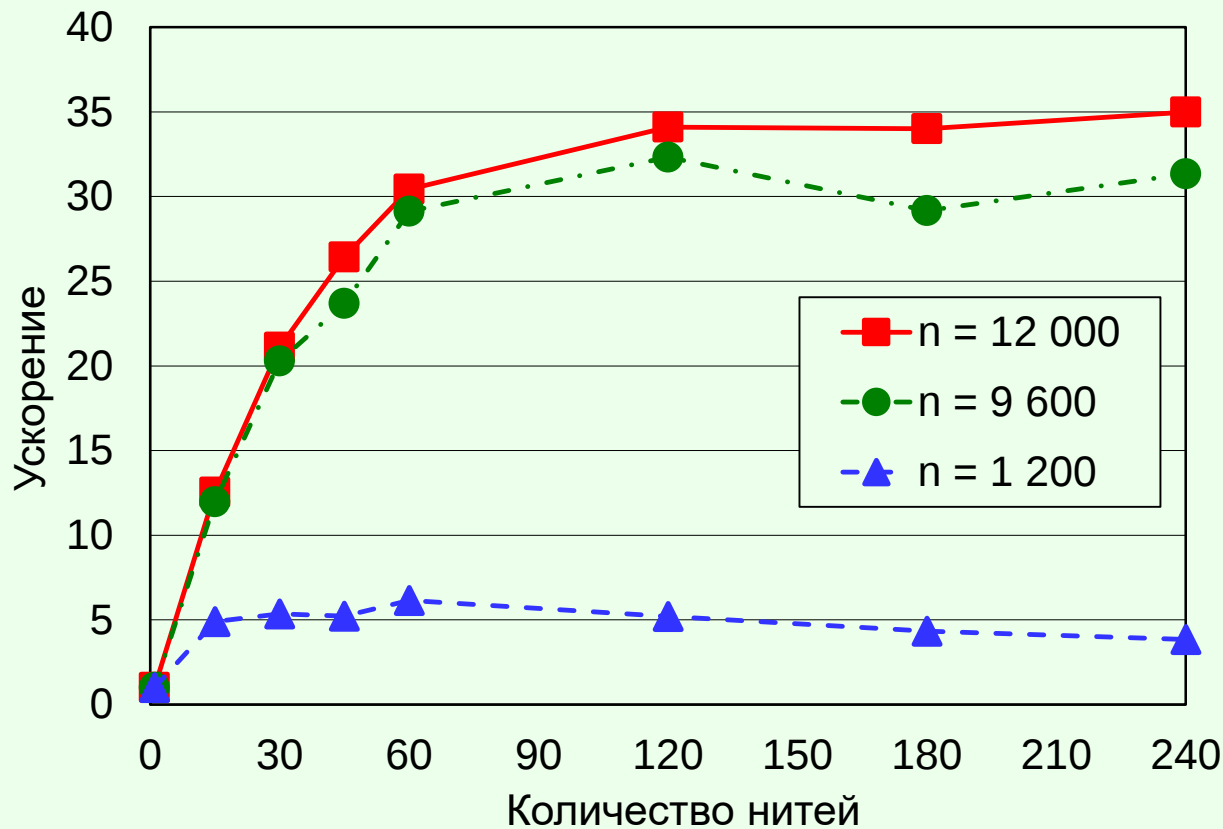
$$Q_{\max}(x) = 2x_0 + 2x_1 + \dots + 2x_{n-2} + x_{n-1}$$

Суперкомпьютер «Торнадо ЮУрГУ»

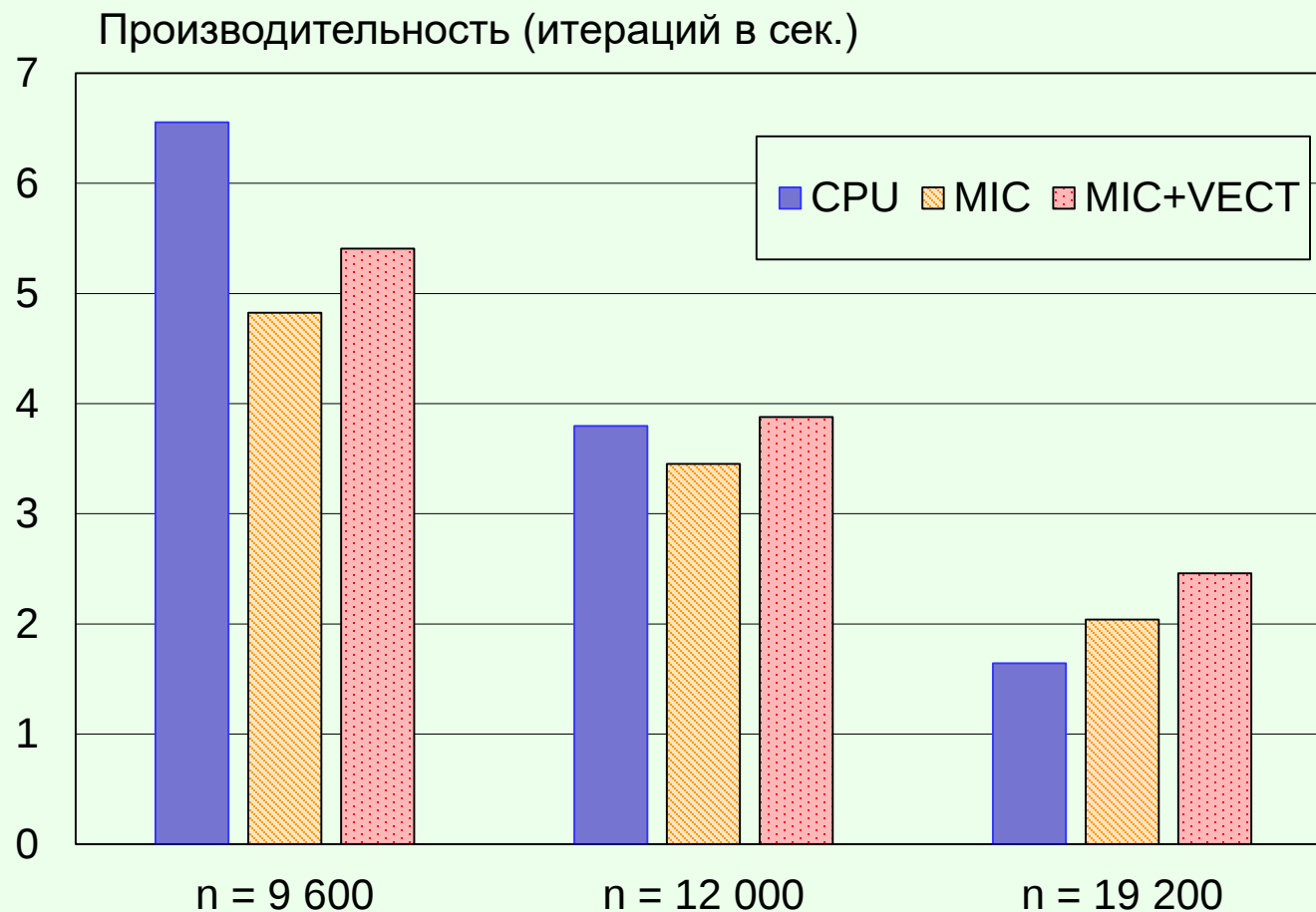


Количество узлов:	384
Тип процессоров:	2 x Intel Xeon X5680 (12 ядер по 3.33 ГГц; 2 потока на ядро)
Оперативная память узла:	24 Гб
Тип сопроцессора:	Intel Xeon Phi SE10X: (61 ядро по 1.1 ГГц; 4 потока на ядро)
Память сопроцессора:	8 Гб
Тип системной сети:	InfiniBand QDR
Тип управляющей сети:	Gigabit Ethernet
Операционная система:	Linux CentOS 6.2

Ускорение вычисления псевдопроекции на Xeon Phi



Сравнение производительности 2×ЦПУ (CPU) и Xeon Phi (MIC)



Спасибо за внимание!