Международная научная конференция «Параллельные вычислительные технологии 2023»
(Санкт-Петербург, 28-30 марта 2023 г.)

ЮУрГУ

Решение задач линейного программирования путем синтеза суперкомпьютерных и нейросетевых технологий на основе визуального представления n-мерных многогранников

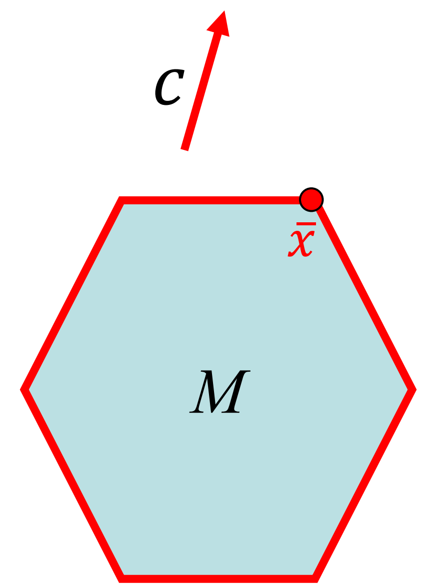
асп. Н.А. Ольховский
д.ф.-м.н. Л.Б. Соколинский

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 23-21-00356

Задача линейного программирования

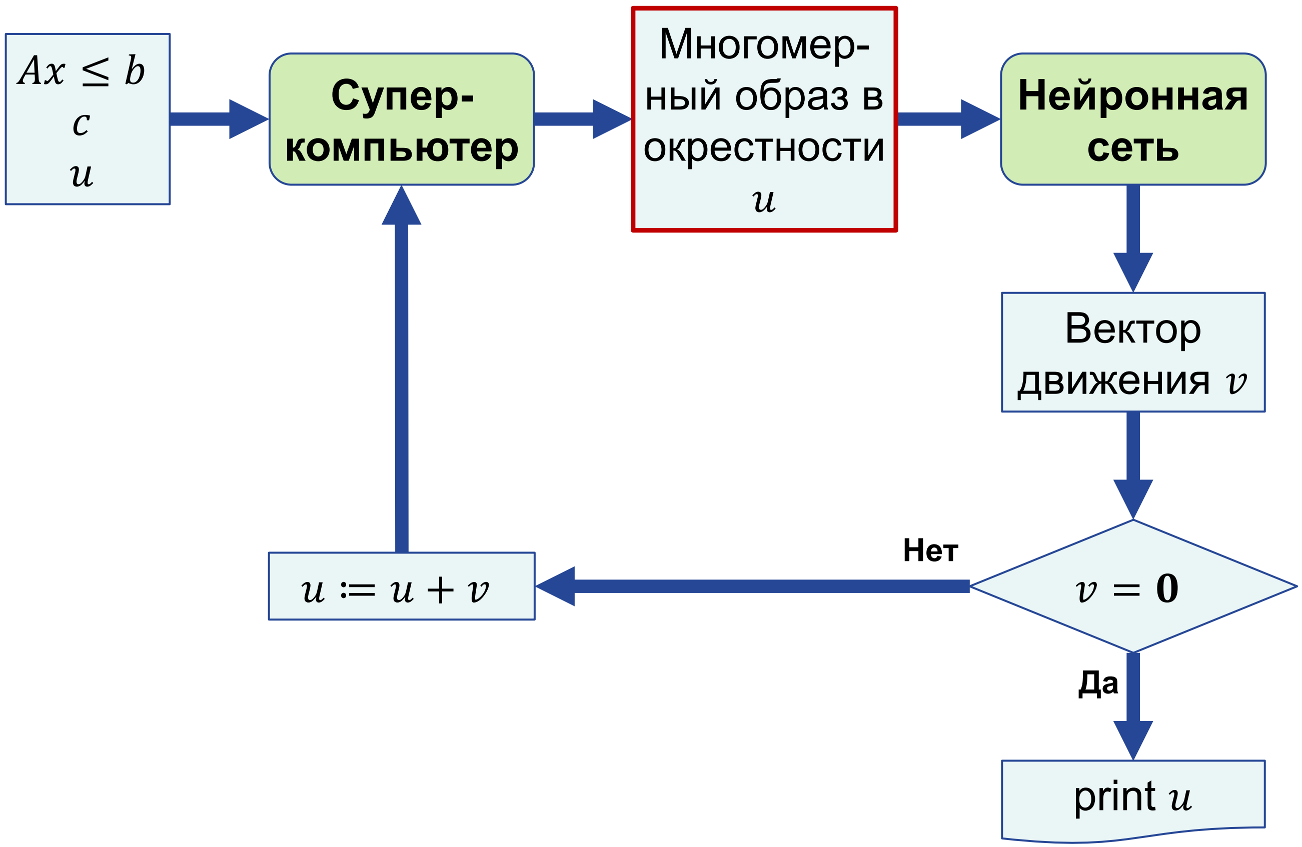
$$\bar{x} = \arg\max\{\langle c, x\rangle | Ax \le b\}$$

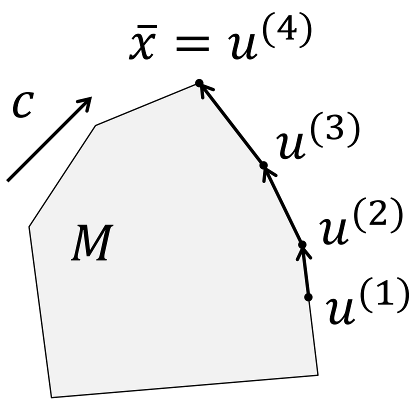


$M = \{x | Ax \le b\}$

- $x \in \mathbb{R}^n$
- A – матрица $m \times n$
- b – вектор размерности m
- c – вектор размерности n
- $\langle c, x\rangle$ – скалярное произведение

Идея предлагаемого подхода

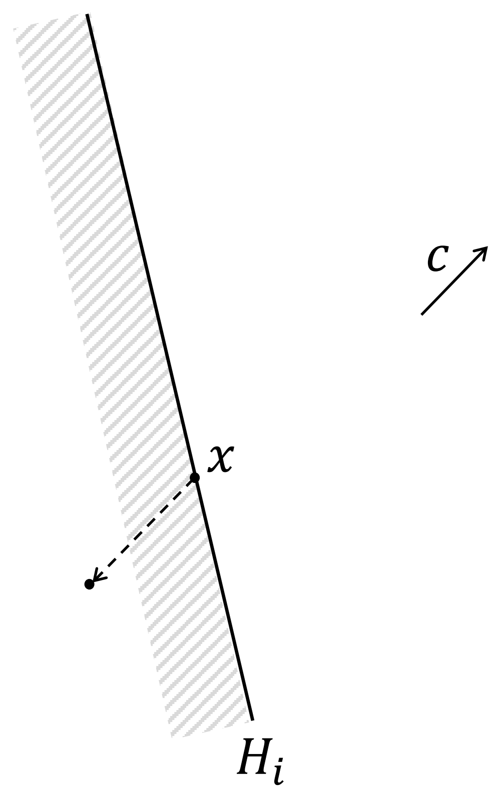




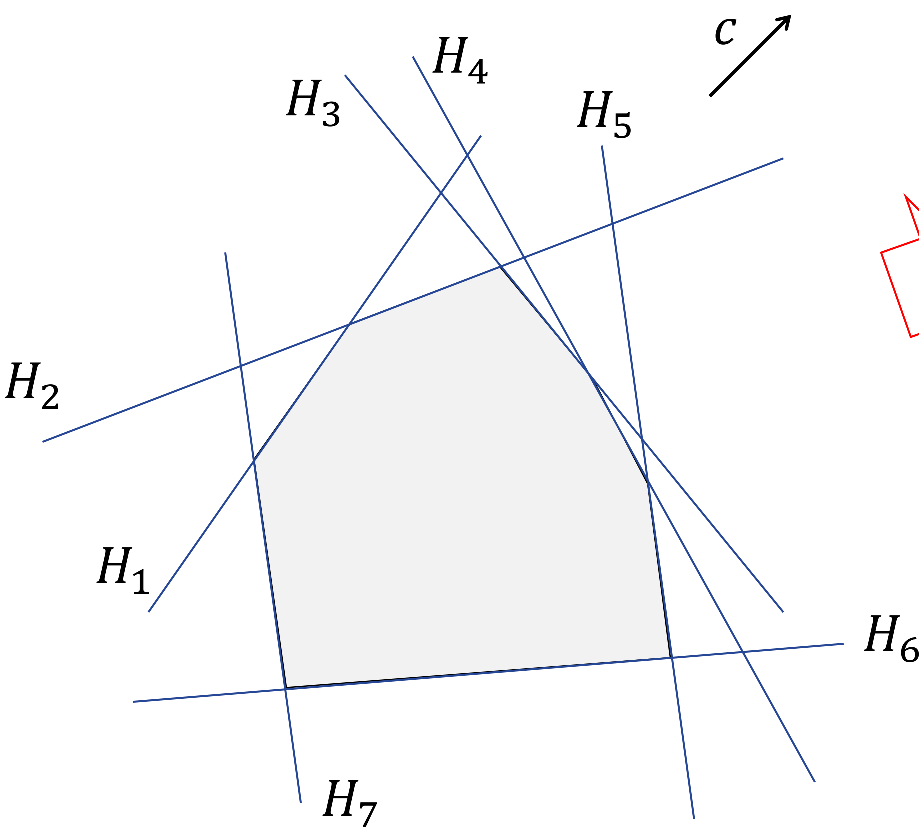
Рецессивное полупространство

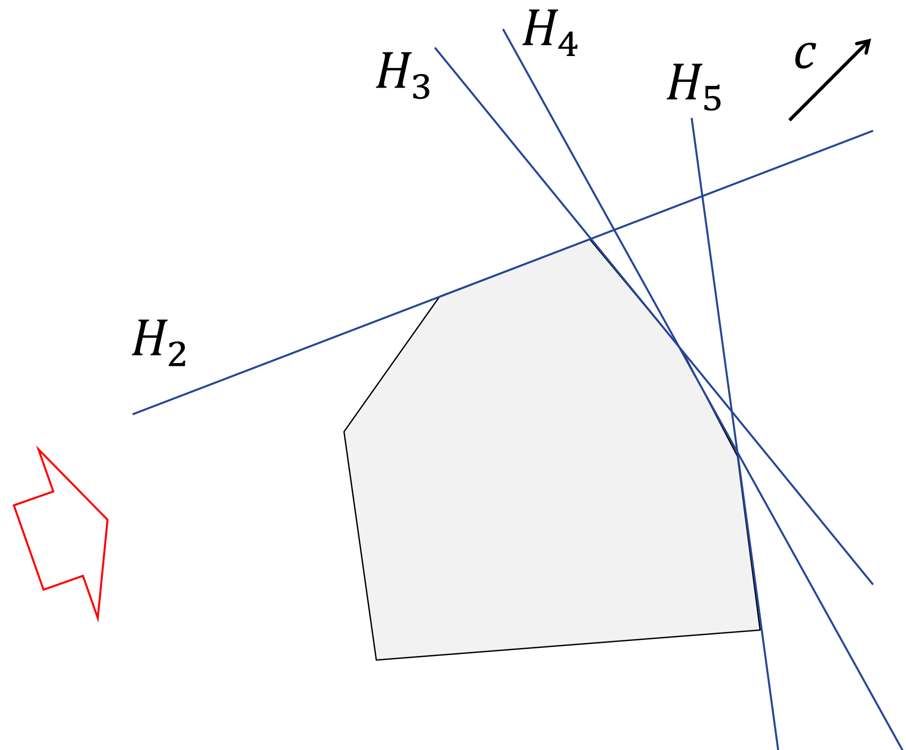
$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a_i, x \rangle \leq b_i\}$$

$$\langle a_i, c \rangle > 0$$



Переход к рецессивному многограннику





$$\mathcal{P} = \{1, \dots, m\}$$

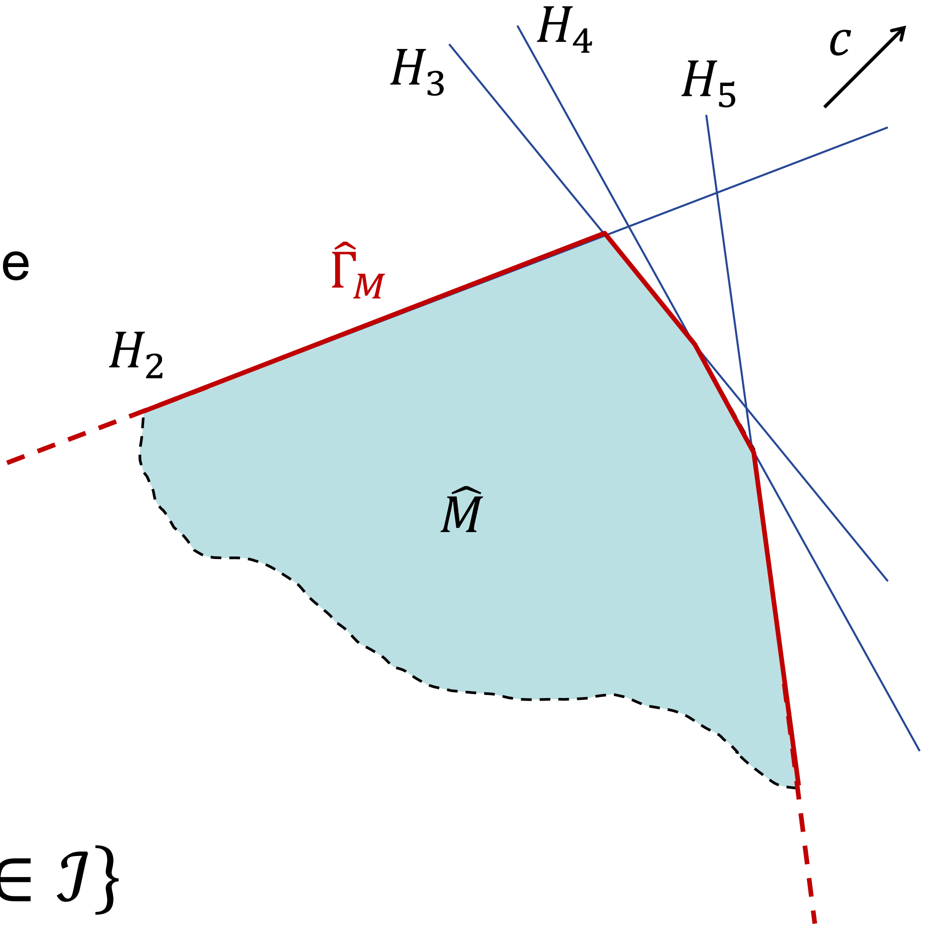
Номера полупространств, рецессивных по отношению к c:

$$\mathcal{J} = \{i \in \mathcal{P} | \langle a_i, c \rangle > 0\}$$

$$\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$$

Рецессивный многогранник

- Многогранник, образуемый пересечением c-рецессивных полупространств
- Представляет собой замкнутое неограниченное множество



$$\widehat{M} = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \widehat{H}_i$$

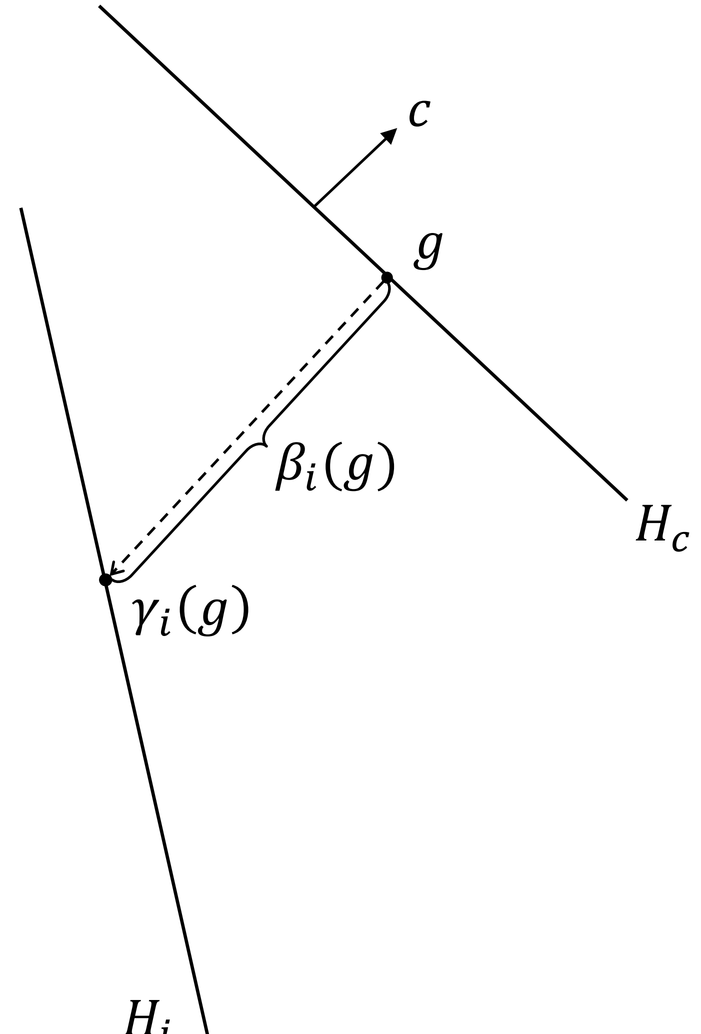
$$\widehat{M} = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a_i, x \rangle \le b_i, i \in \mathcal{J}\}$$

$$\hat{\Gamma}_M = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \forall \varepsilon > 0: S_\varepsilon(x) \cap \widehat{M} \neq \emptyset \wedge S_\varepsilon(x) \cap \widehat{M}^C \neq \emptyset \right\}$$

Смещение

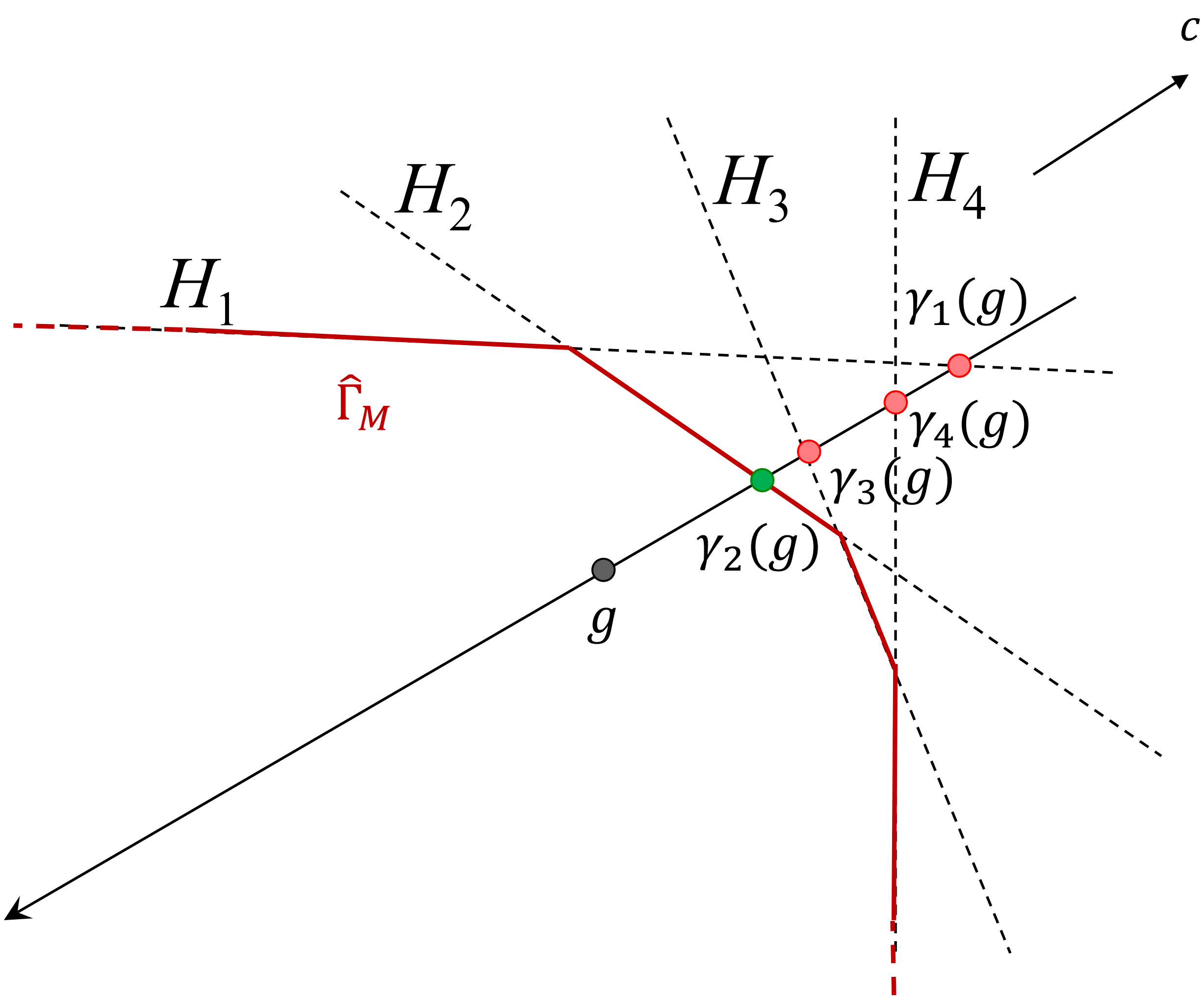
Целевая проекция: $\gamma_i(g) = g - \beta_i(g)\frac{c}{\|c\|}$

Ортогональная проекция: $\pi_{\mathrm{c}}(\gamma_{\mathrm{i}}(g)) = g$



$$\boxed{\beta_i(g) = \frac{\langle a_i, g\rangle - b_i}{\langle a_i, c\rangle}\|c\|}$$

Целевая проекция на границу рецессивного многогранника



$$\hat{\beta}(g) = \max_{i \in \mathcal{J}} \beta_i(g)$$

$$\hat{\gamma}(g) = g - \hat{\beta}(g) \frac{c}{\|c\|}$$

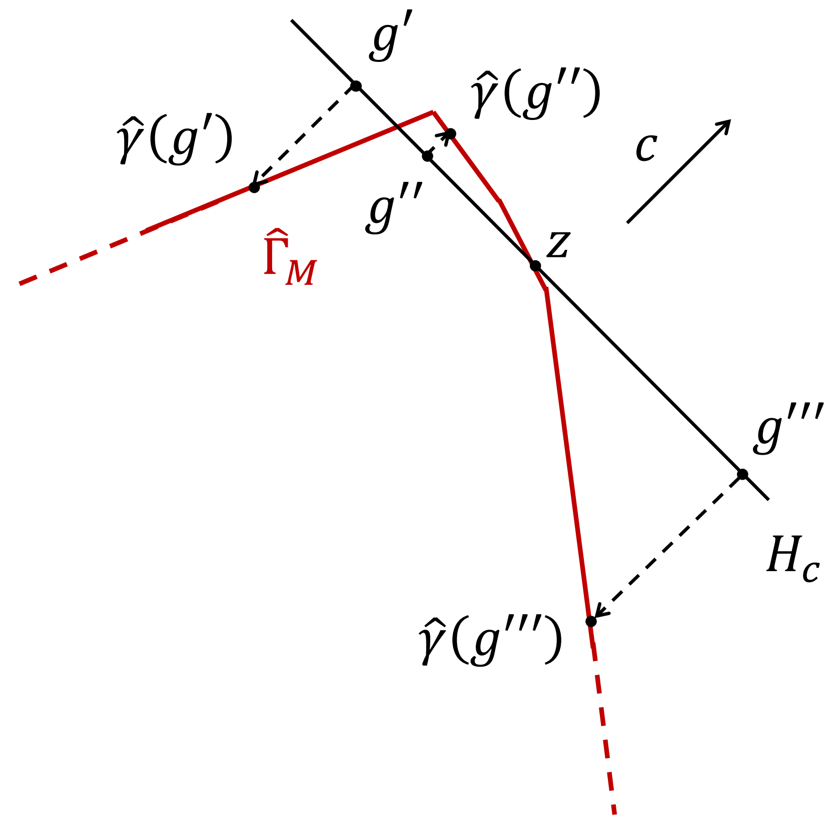
$$\hat{\gamma}(g) = \gamma_2(g)$$

$$\hat{\beta}(g) = \beta_2(g)$$

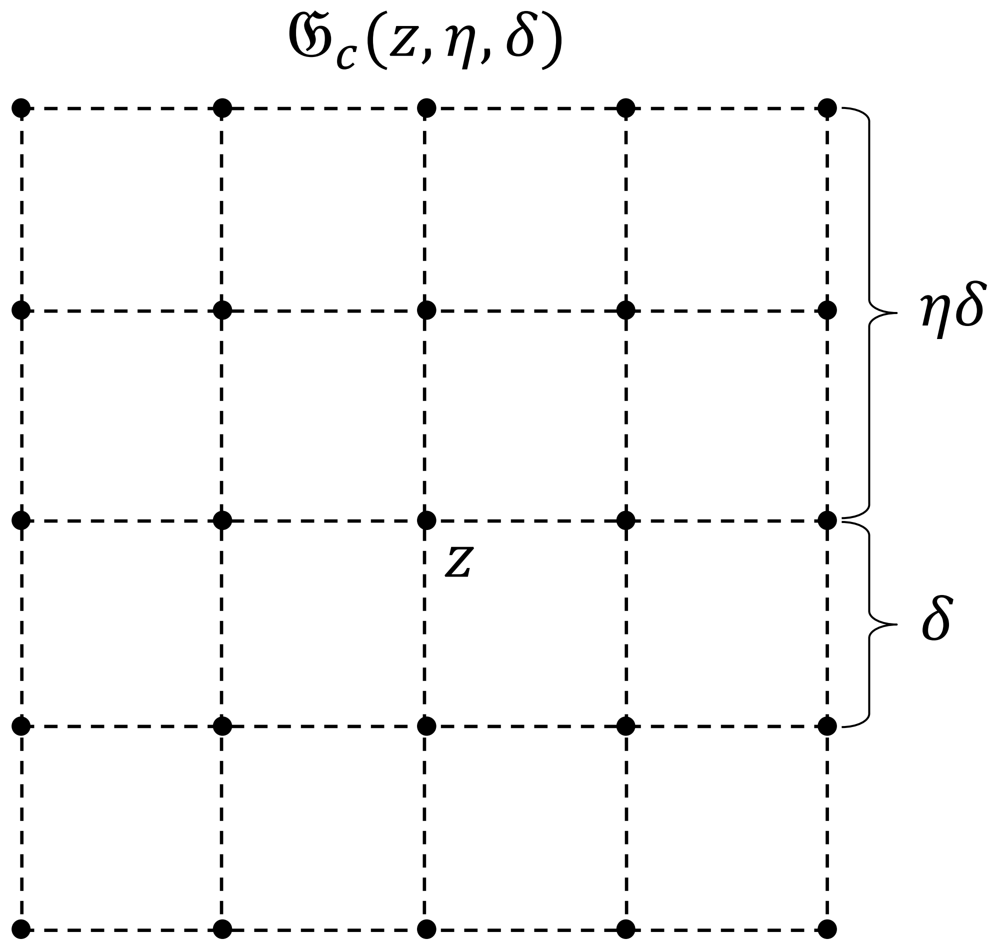
Построение рецептивного поля

Рецептивная гиперплоскость: $H_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, x - z \rangle = 0\}$

Целевая проекция: $\hat{\gamma} \; : \; H_c \to \hat{\Gamma}_M$

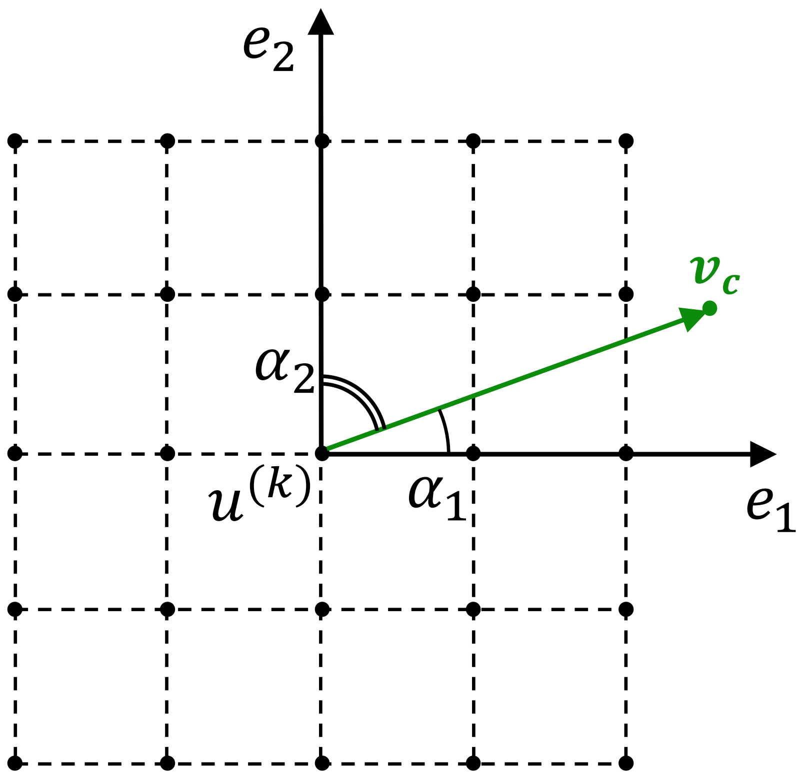


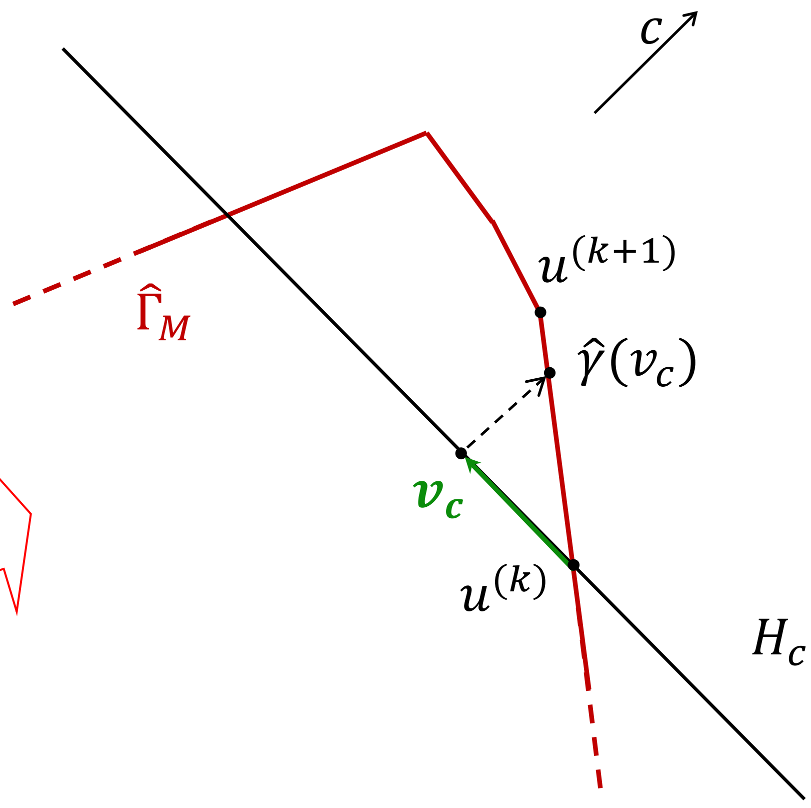
Рецептивное поле (flat)



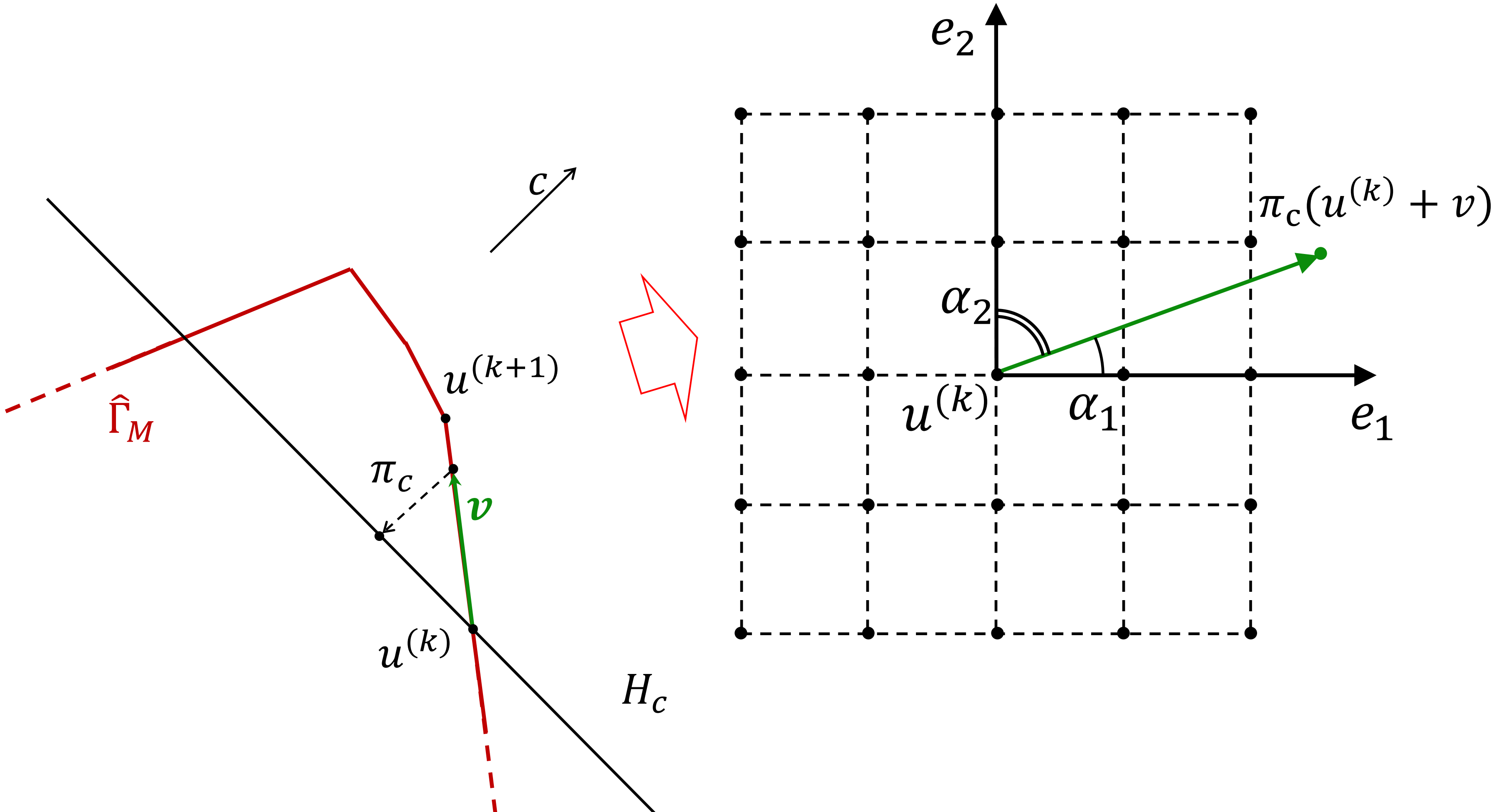
η – ранг
δ – шаг

Вектор движения

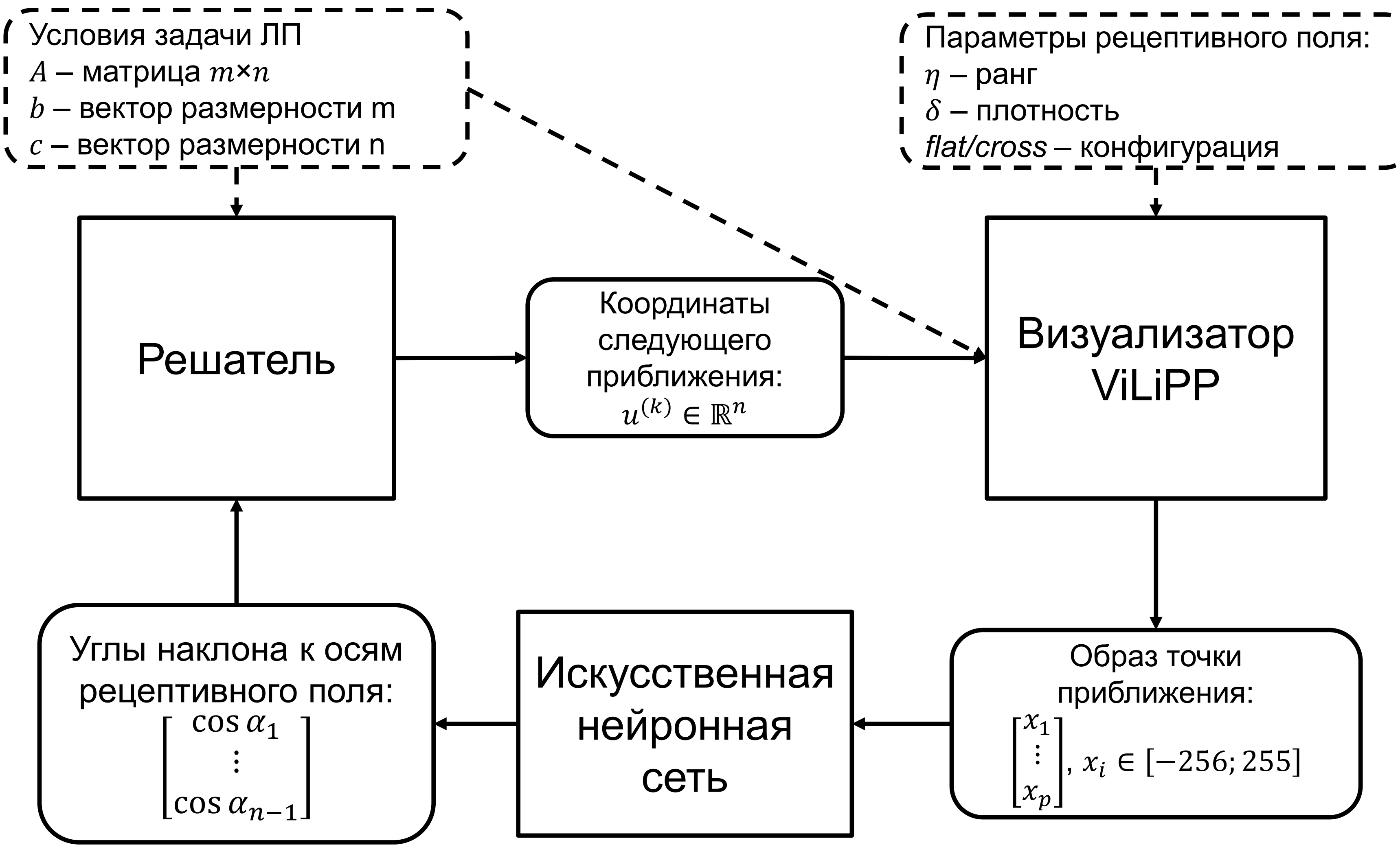




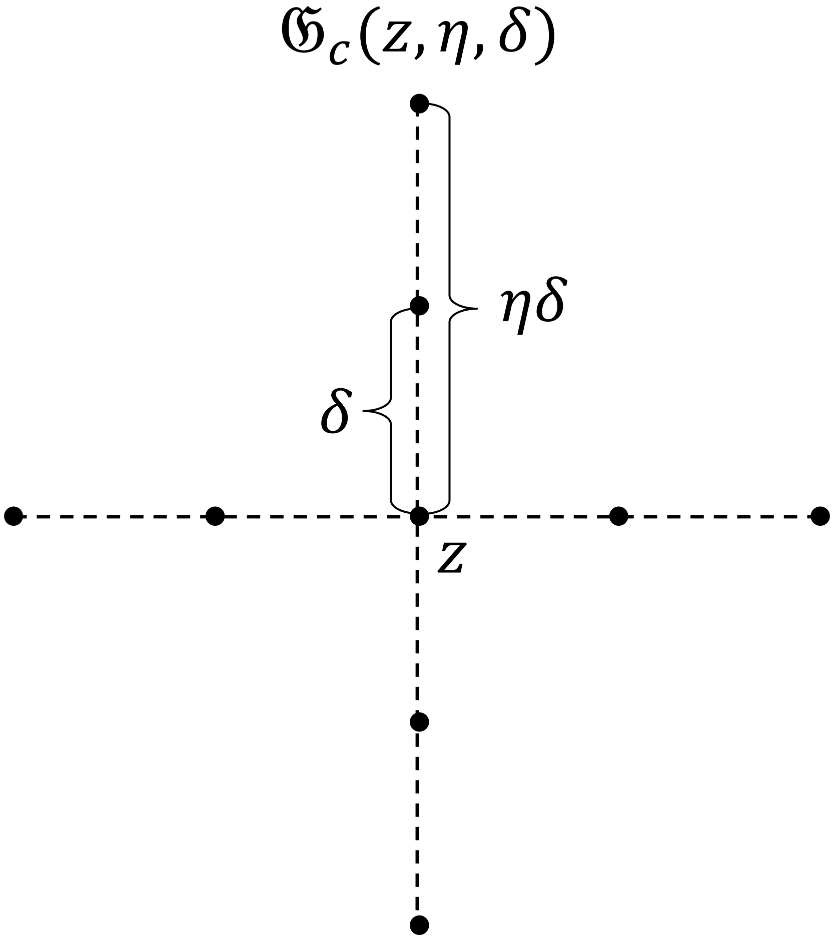
Создание обучающего прецедента



Архитектура программного комплекса

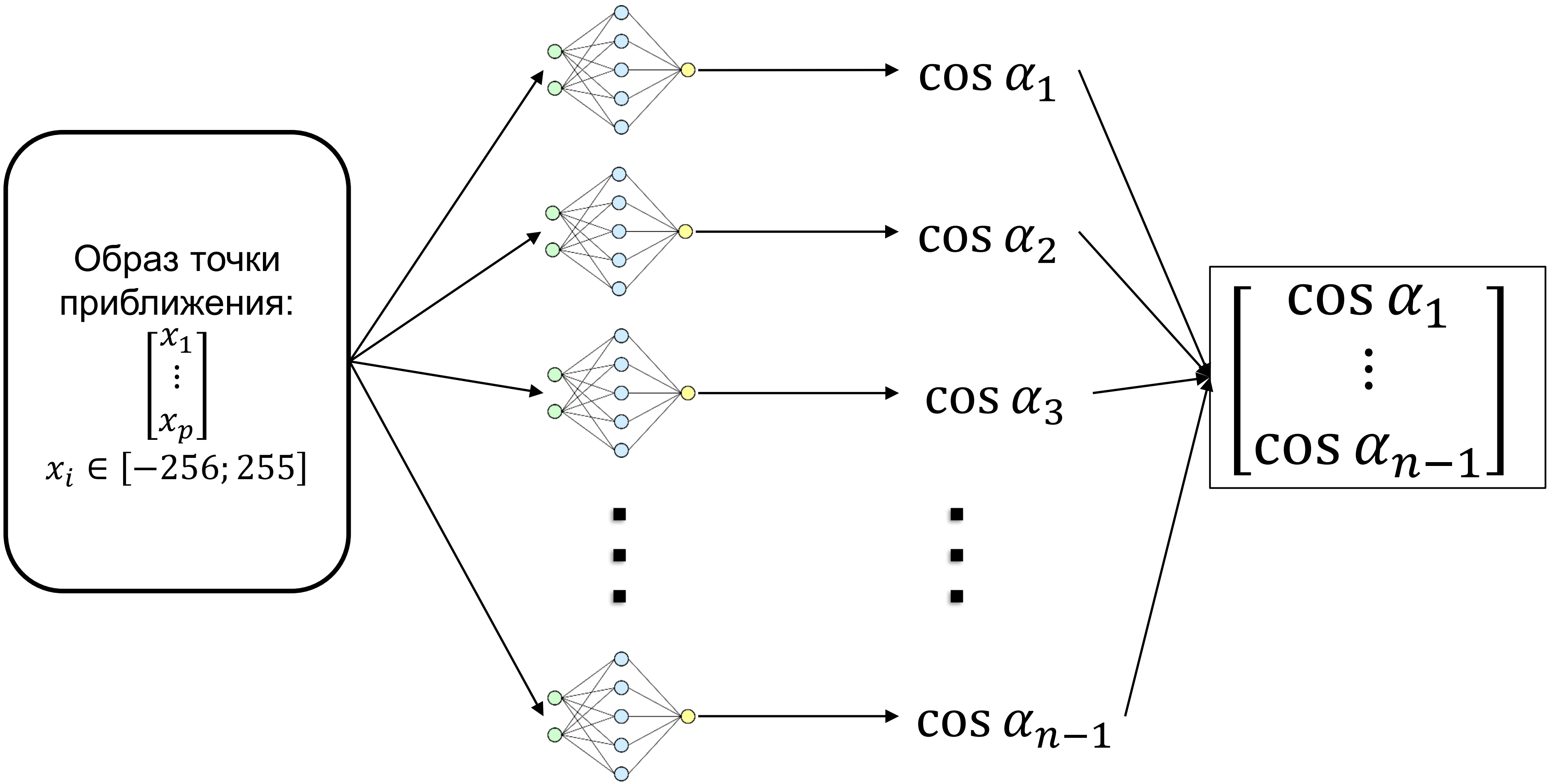


Рецептивное поле (cross)

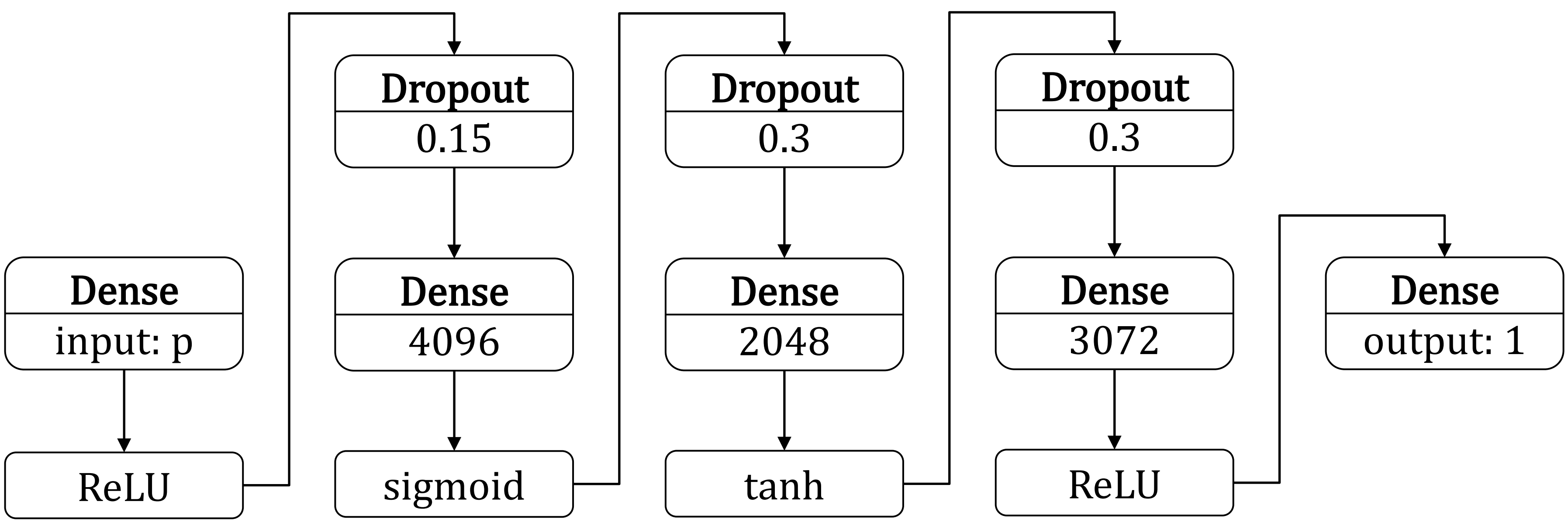


η – ранг
δ – плотность

Архитектура нейронной сети



Архитектура нейронной сети



Для **cross:** $p = 2\eta(n-1)+1$

Для **flat:** $p = (2\eta+1)^{n-1}$

Эксперименты

Параметры

Число случайных задач ЛП

$50\,000$ (для $\mathbb{R}^3$); $20\,000$ (для $\mathbb{R}^4$);

Число случайных ограничений

7 (для $\mathbb{R}^3$); 8 (для $\mathbb{R}^4$);

Конфигурации рецептивного поля

Ранг (η)	Плотность (δ)	Количество точек рецептивного поля			
		K^2_{flat}	K^2_{cross}	K^3_{flat}	K^3_{cross}
5	1.00	121	21	1331	31
4	1.25	81	17	729	25
3	1.66667	49	13	343	19
2	2.5	25	9	125	13
1	5	9	5	27	7

Метрики

Mean Absolute Error (MAE)

$$\mathrm{MAE} = \frac{1}{n}\sum\left|y_{true} - y_{pred}\right|$$

Cosine Similarity (CS)

$$CS = \frac{\sum(y_{true} \cdot y_{pred})}{\sqrt{\sum y_{true}^2} \cdot \sqrt{\sum y_{pred}^2}} \cdot 100$$

y_{true} – *истинное значение*
y_{pred} – *ответ ИНС*
n – *размер выборки (batch size)*

Достигнутая точность

Для $\mathbb{R}^3$:

flat

$\mathrm{CS} = 97{,}4\%$

$\mathrm{MAE} = 0{,}0311$

cross

$\mathrm{CS} = 96{,}2\%$

$\mathrm{MAE} = 0{,}0369$

Для $\mathbb{R}^4$:

flat

$\mathrm{CS} = 95{,}2\%$

$\mathrm{MAE} = 0{,}0437$

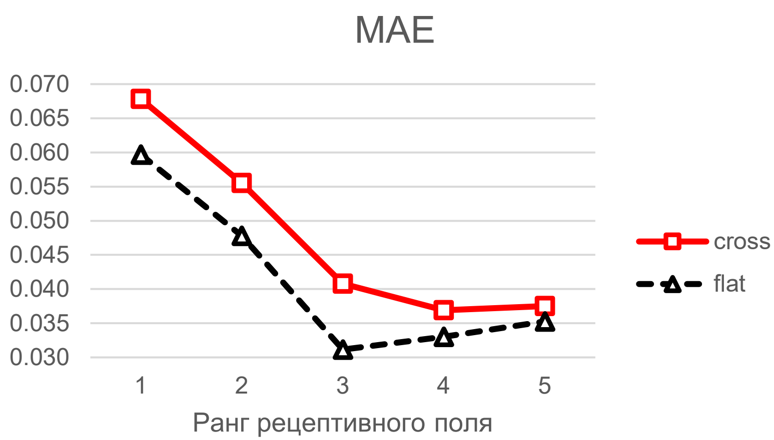
cross

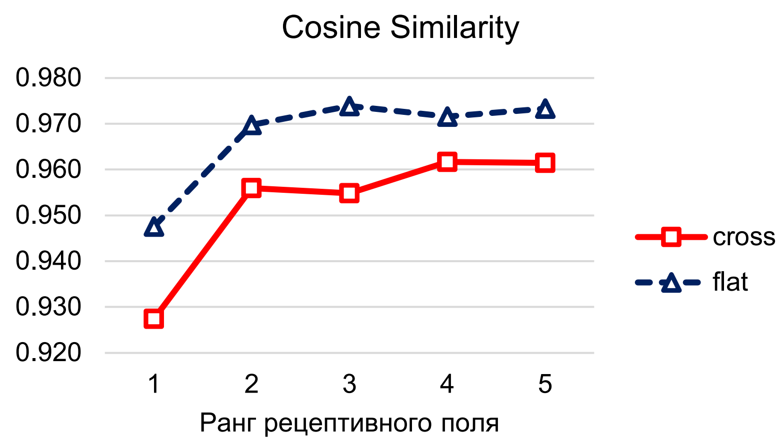
$\mathrm{CS} = 95{,}9\%$

$\mathrm{MAE} = 0{,}0499$

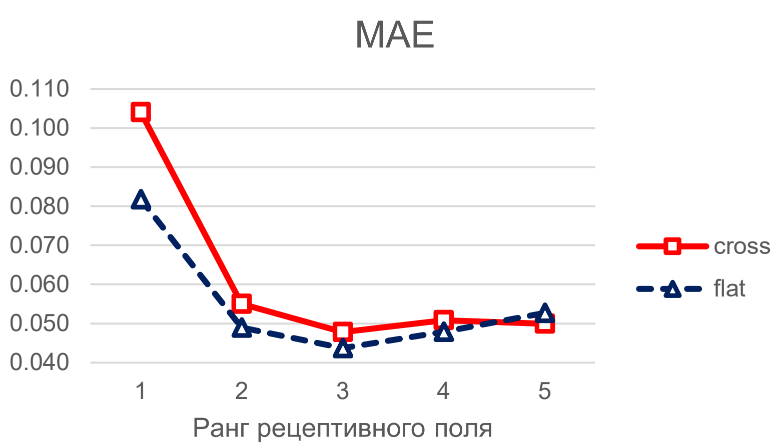
Зависимость точности от η

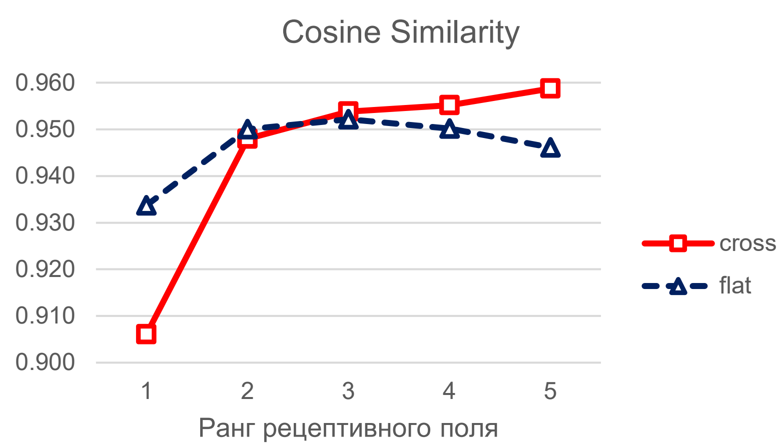
$\mathbb{R}^3$





$\mathbb{R}^4$





Спасибо за внимание!