



Параллельный алгоритм решения нестационарных систем линейных неравенств

д.ф.-м.н., Л.Б. Соколинский,
к.ф.-м.н., И.М. Соколинская

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

Большие системы линейных неравенств

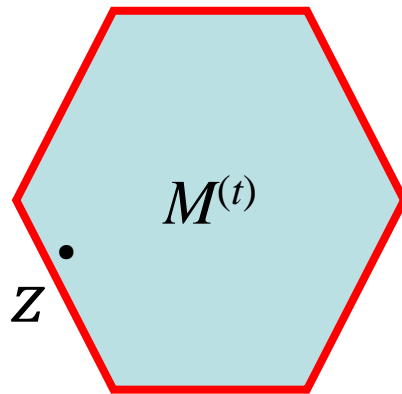
- Линейное программирование (нестационарность)
- Восстановление изображений по проекциям
- Обработка изображений в магнитно-резонансной томографии
- Радиационная терапия с модулируемой интенсивностью
- ...

Нестационарная система линейных неравенств

$$A^{(t)}x \leq b^{(t)}$$

- $x \in \mathbb{R}_n$
- $A^{(t)}$ – матрица $m \times n$
- $b^{(t)}$ – вектор размерности n
- $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ – время

Геометрическая интерпретация



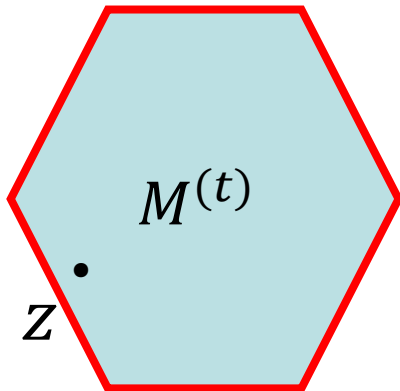
$$A^{(t)}x \leq b^{(t)} \Leftrightarrow x \in M^{(t)}$$

Известные итерационные методы

- Метод релаксаций Агмона-Моцкина-Шоенберга
- Проекционный метод Цензора-Эльфвинга
- Метод псевдопроекции на основе фейеровских приближений
- ...

Проблема с нестационарностью задачи

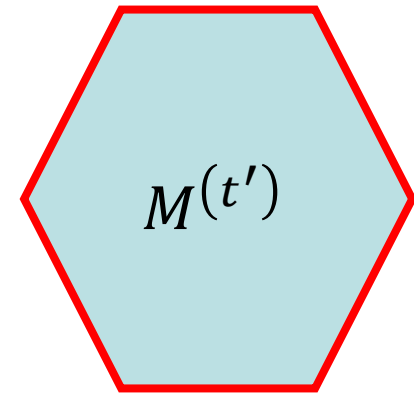
Нельзя просто решить систему неравенств $A^{(t)}x \leq b^{(t)}$, так как в процессе решения многогранник M_t может изменить свою форму и положение в пространстве!



$$A^{(t)}x \leq b^{(t)} \Leftrightarrow x \in M^{(t)}$$

Проблема с нестационарностью задачи

Нельзя просто решить систему неравенств $A^{(t)}x \leq b^{(t)}$, так как в процессе решения многогранник M_t может изменить свою форму и положение в пространстве!

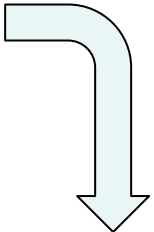


z^*

$$A^{(t')}x \leq b^{(t')} \Leftrightarrow x \in M^{(t')}$$

$$A^{(t)}x \leq b^{(t)} \Leftrightarrow x \in M^{(t)}$$

Алгоритм для решения нестационарной системы линейных неравенств

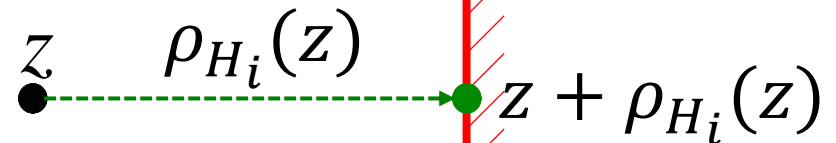
- Требования:
 - Высокая масштабируемость
 - Самокорректируемость
 - Метод псевдопроекции на основе фейеровских приближений
 - Масштабируемый
 - Самокорректирующийся
- 

Вектор проекции на гиперплоскость

 H_i

$$H_i: \langle a_i, x \rangle = b_i$$

$$\rho_{H_i}(z) = \frac{b_i - \langle a_i, z \rangle}{\|a_i\|^2} a_i$$

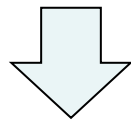


$\|\cdot\|$ – евклидова норма

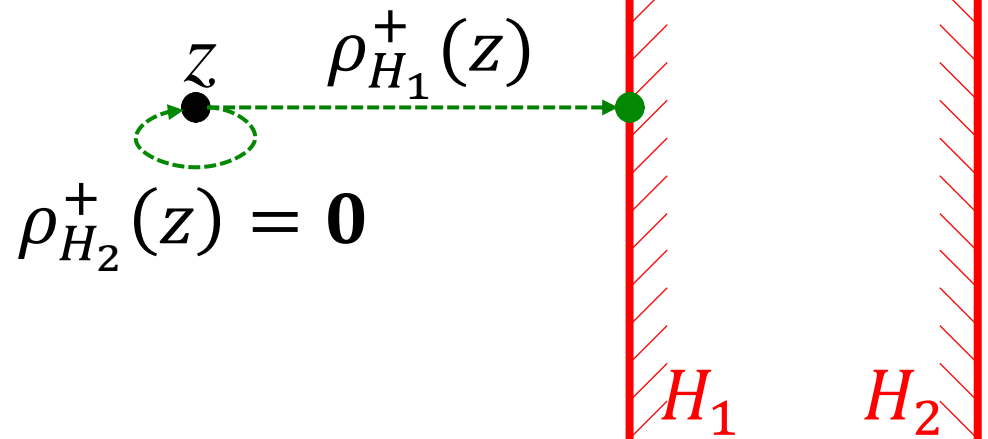
$\langle a_i, z \rangle$ – скалярное произведение

Положительная срезка вектора проекции на гиперплоскость H_i

$$\rho_{H_i}(z) = \frac{b_i - \langle a_i, z \rangle}{\|a_i\|^2} a_i$$



$$\rho_{H_i}^+(z) = \frac{\min\{b_i - \langle a_i, z \rangle, 0\}}{\|a_i\|^2} a_i$$



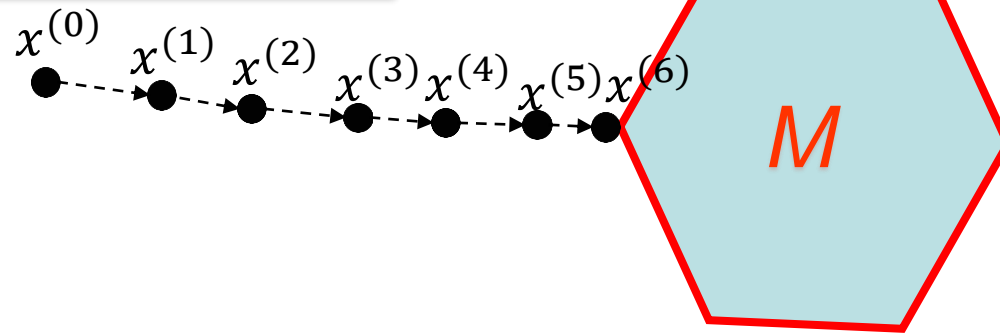
Проекционное отображение

$$\varphi(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m \rho_{H_i}^+(x)$$

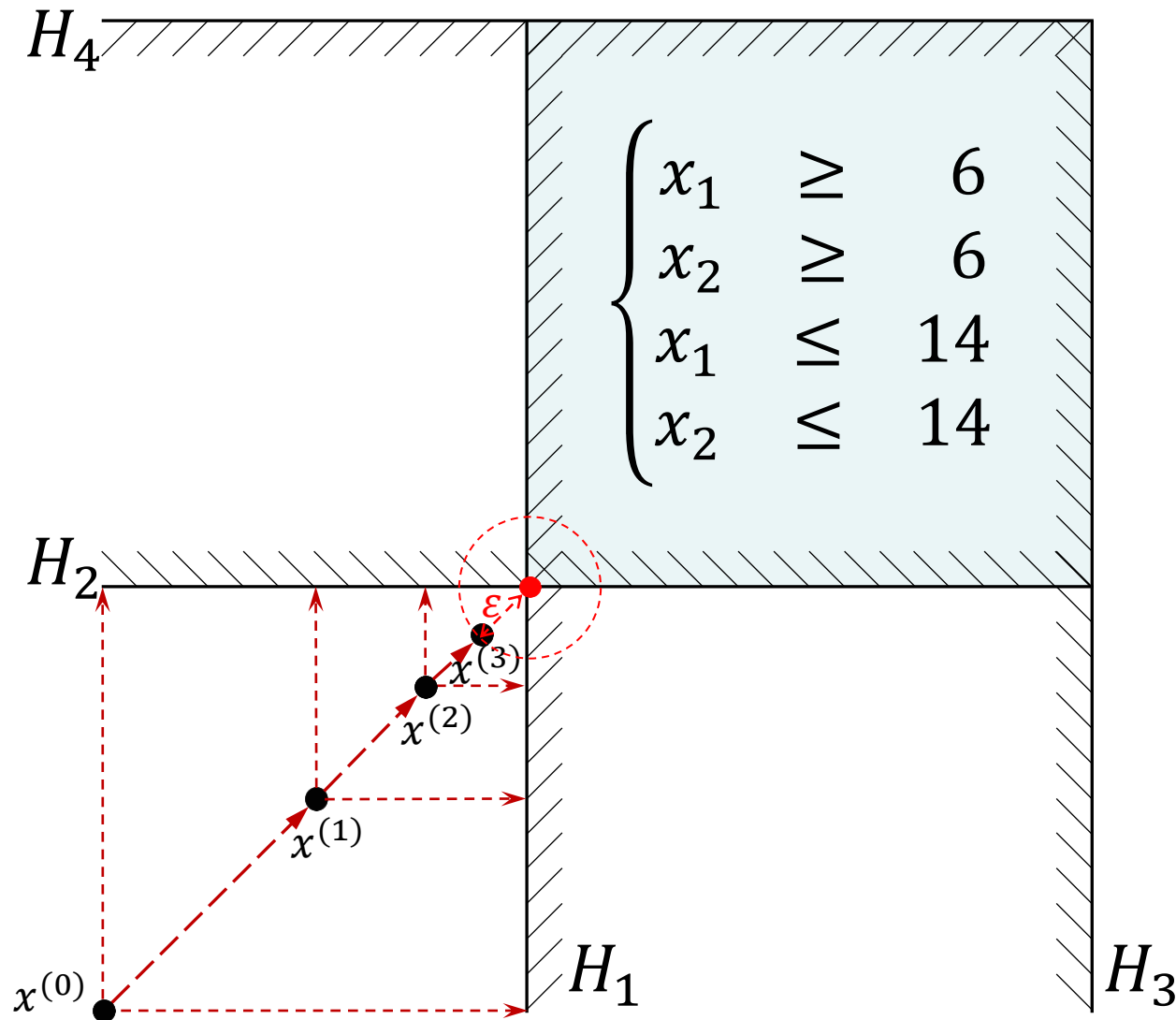
h – количество ненулевых слагаемых в сумме $\sum_{i=1}^m \rho_{H_i}^+(x)$

Алгоритм построения псевдопроекции

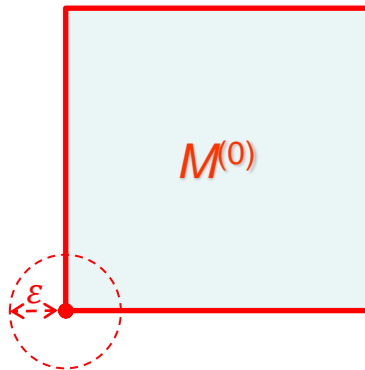
1. $x^{(0)} := \mathbf{0}$
2. $k := 0$
3. $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \varphi^{(k)}(x^{(k)})$
4. **if** $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|^2 < \varepsilon$ **goto** 7
5. $k := k + 1$
6. **goto** 3
7. **stop**



Как работает алгоритм

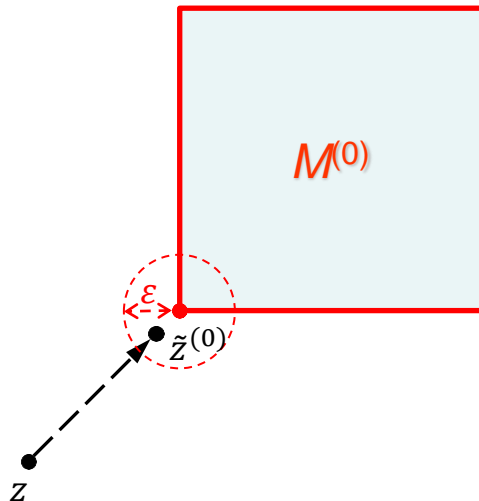


Метод псевдопроекций не работает в нестационарном случае

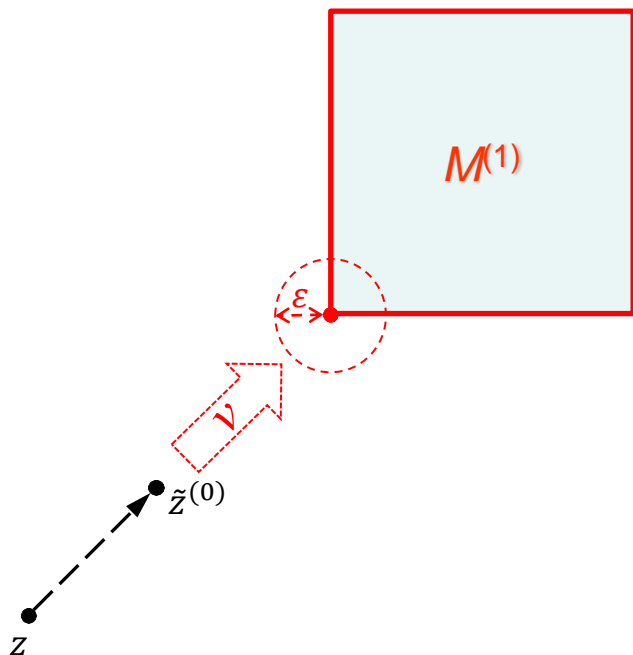


•
 z

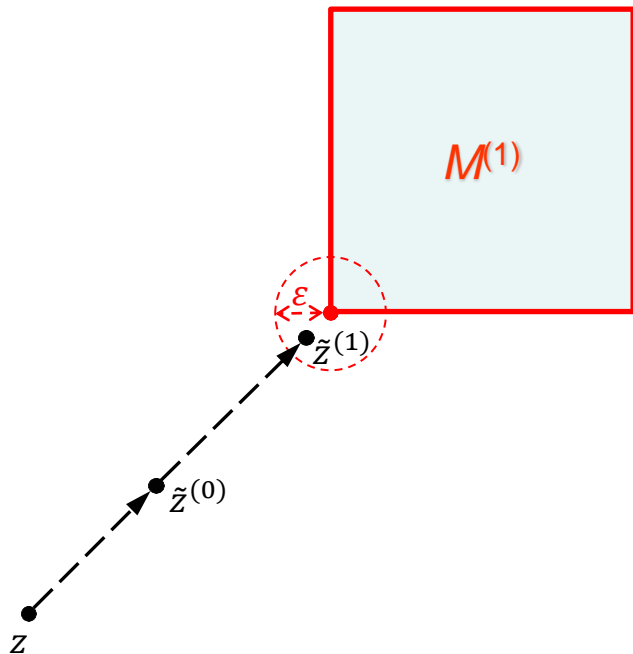
Метод псевдопроекции для неравенств не работает в нестационарном случае



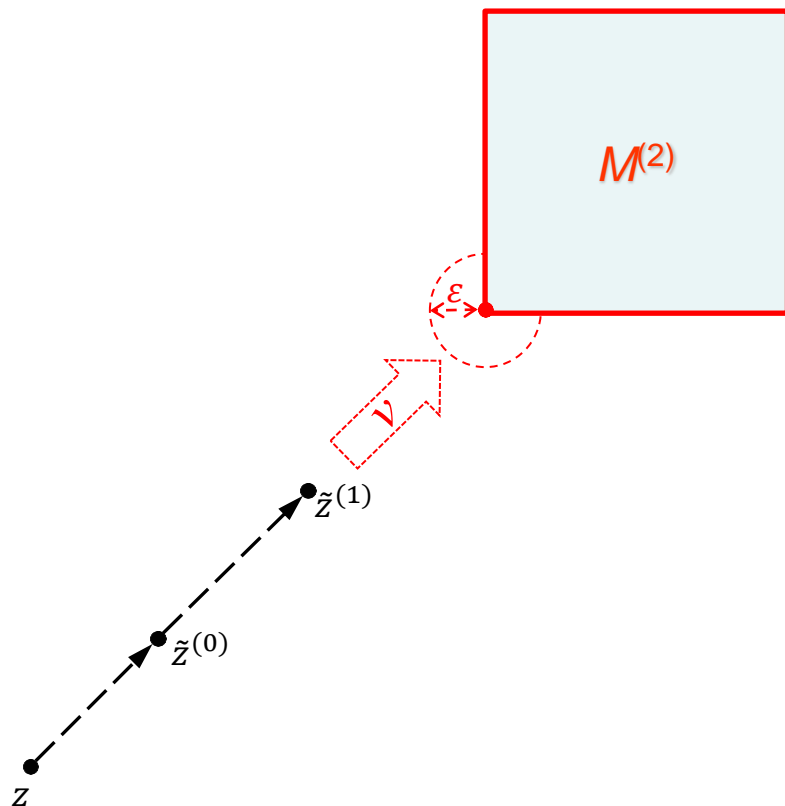
Метод псевдопроекций для неравенств не работает в нестационарном случае



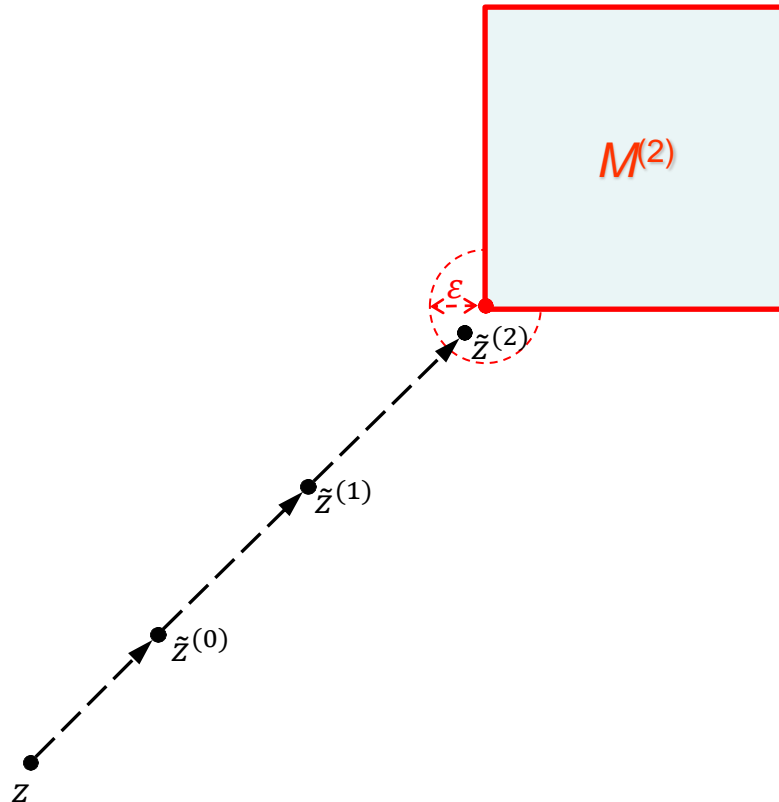
Метод псевдопроекции для неравенств не работает в нестационарном случае



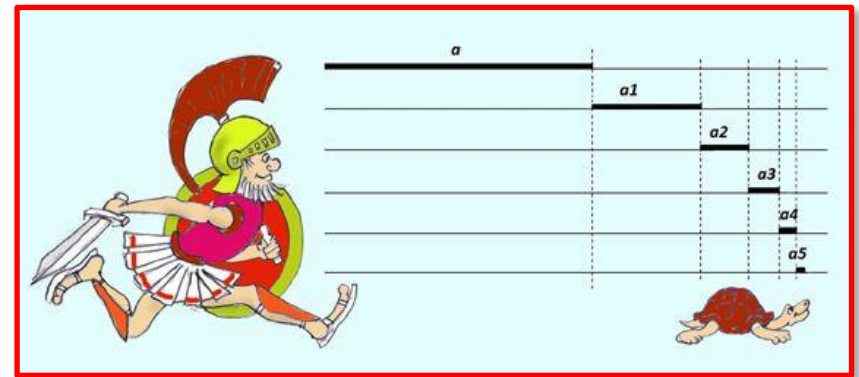
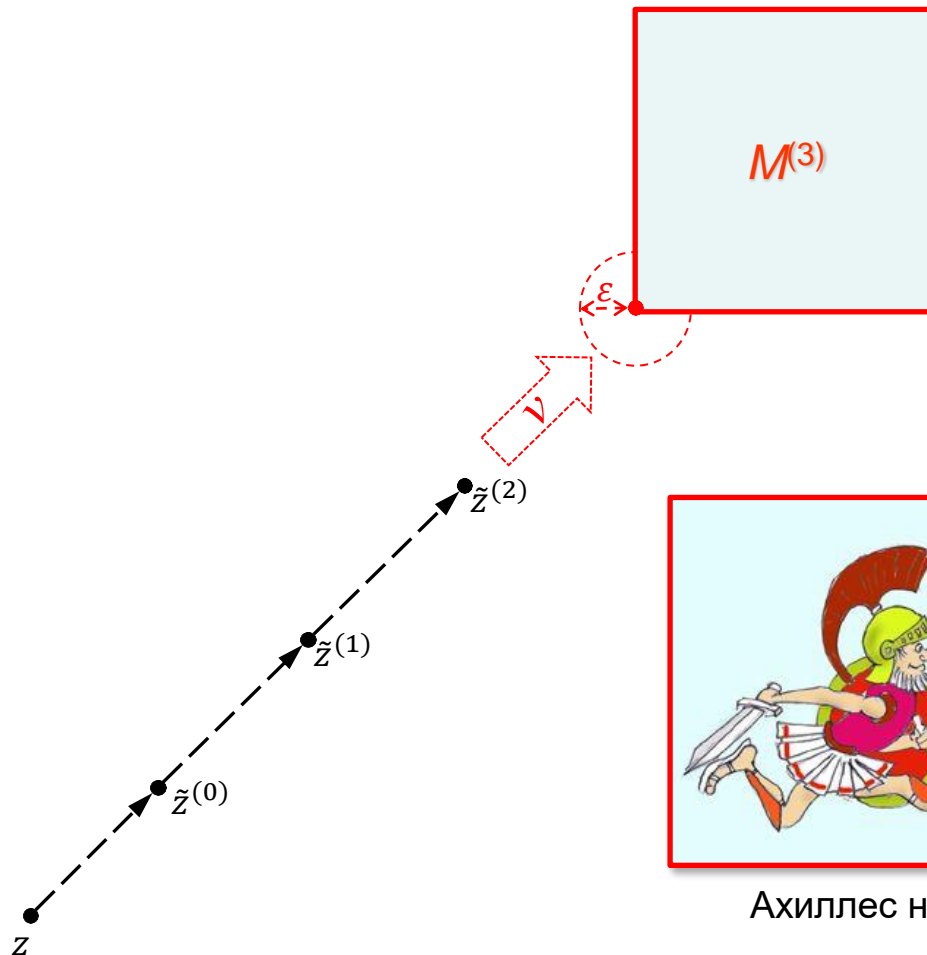
Метод псевдопроекций для неравенств не работает в нестационарном случае



Метод псевдопроекций для неравенств не работает в нестационарном случае



Метод псевдопроекций для неравенств не работает в нестационарном случае



Ахиллес никогда не догонит черепаху!

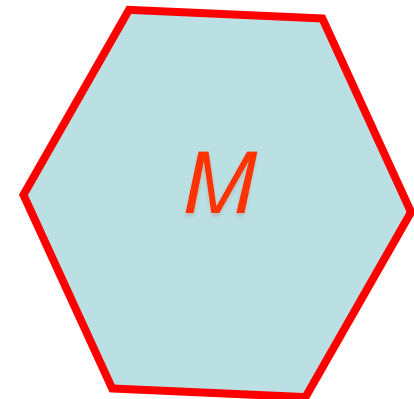
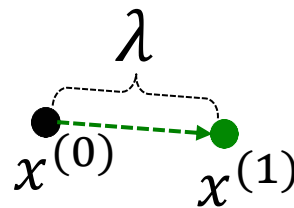


Модификация проекционного отображения

$$\varphi(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m \rho_{H_i}^+(x) \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = \lambda \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}$$

$\lambda > 0$

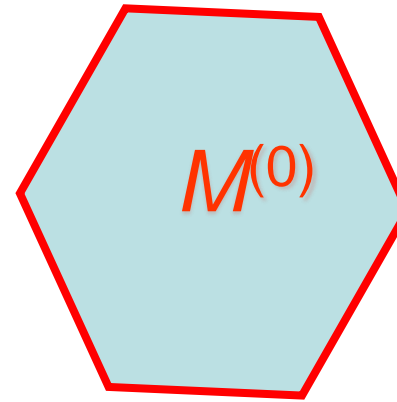
$$x^{(1)} = x^{(0)} + \psi(x^{(0)})$$



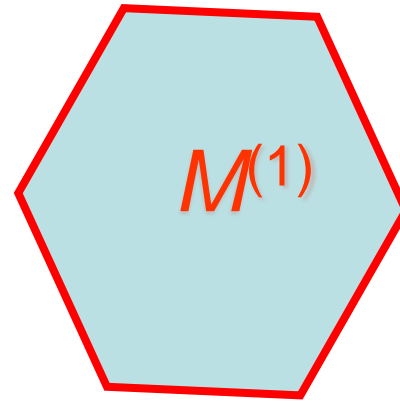
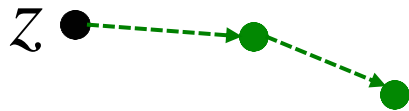
Модифицированный алгоритм

1. $x^{(0)} := \mathbf{0}$
2. $k := 0$
3. $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \psi^{(k)}(x^{(k)})$
4. **if** $x^{(k+1)} \in M^{(k)}$ **goto** 7
5. $k := k + 1$
6. **goto** 3
7. **stop**

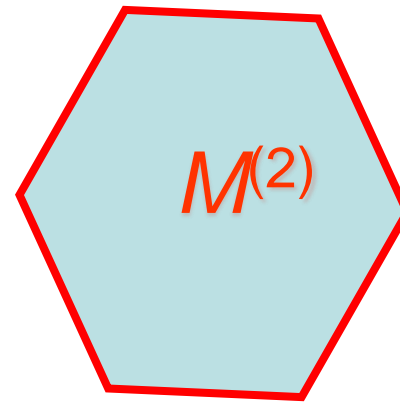
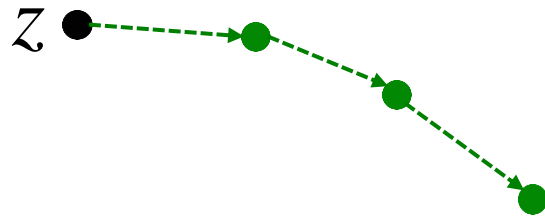
Работа модифицированного алгоритма



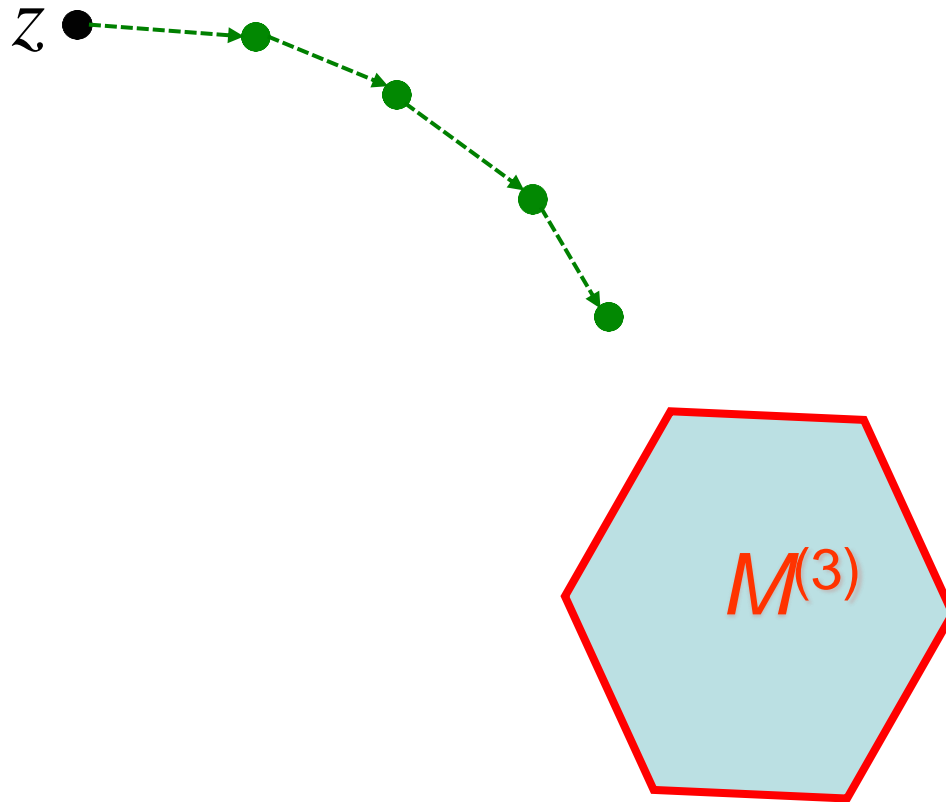
Работа модифицированного алгоритма



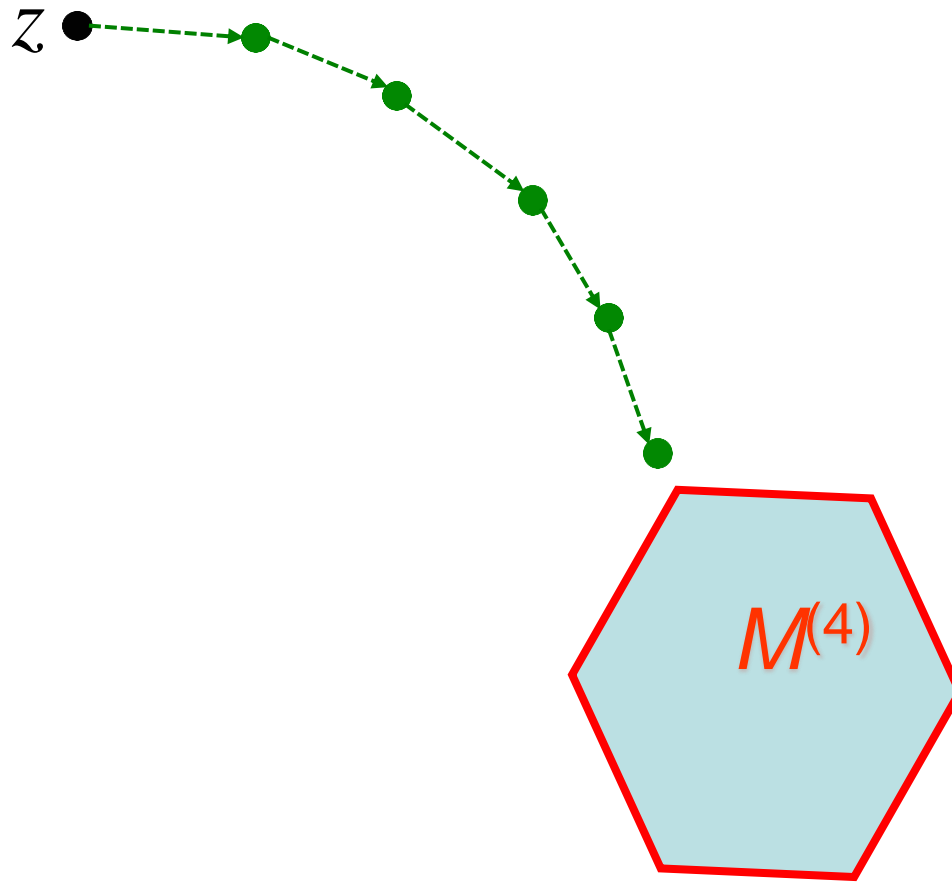
Работа модифицированного алгоритма



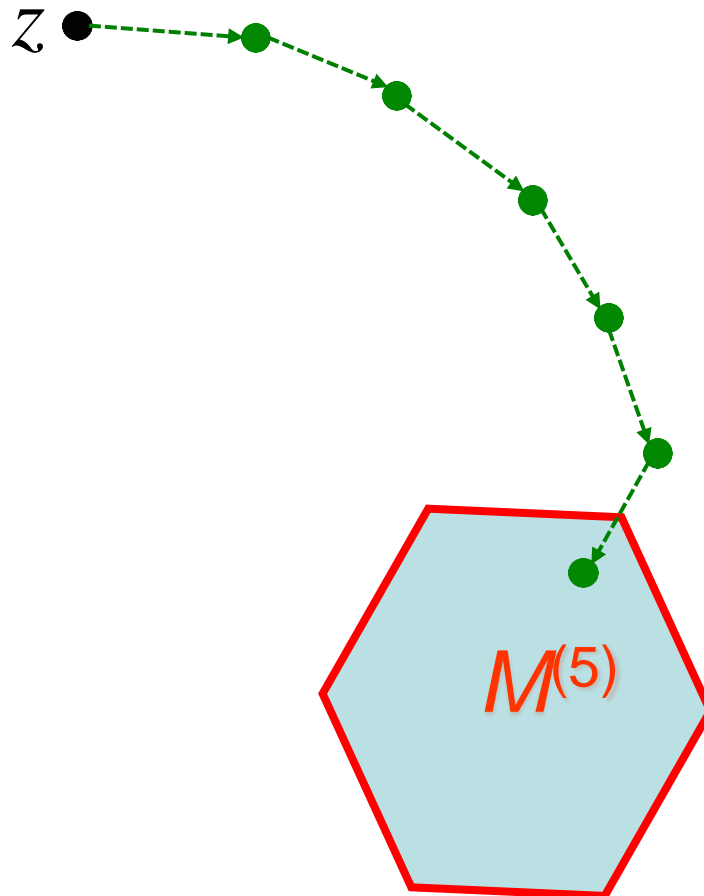
Работа модифицированного алгоритма



Работа модифицированного алгоритма



Работа модифицированного алгоритма



Ахиллес догнал черепаху!

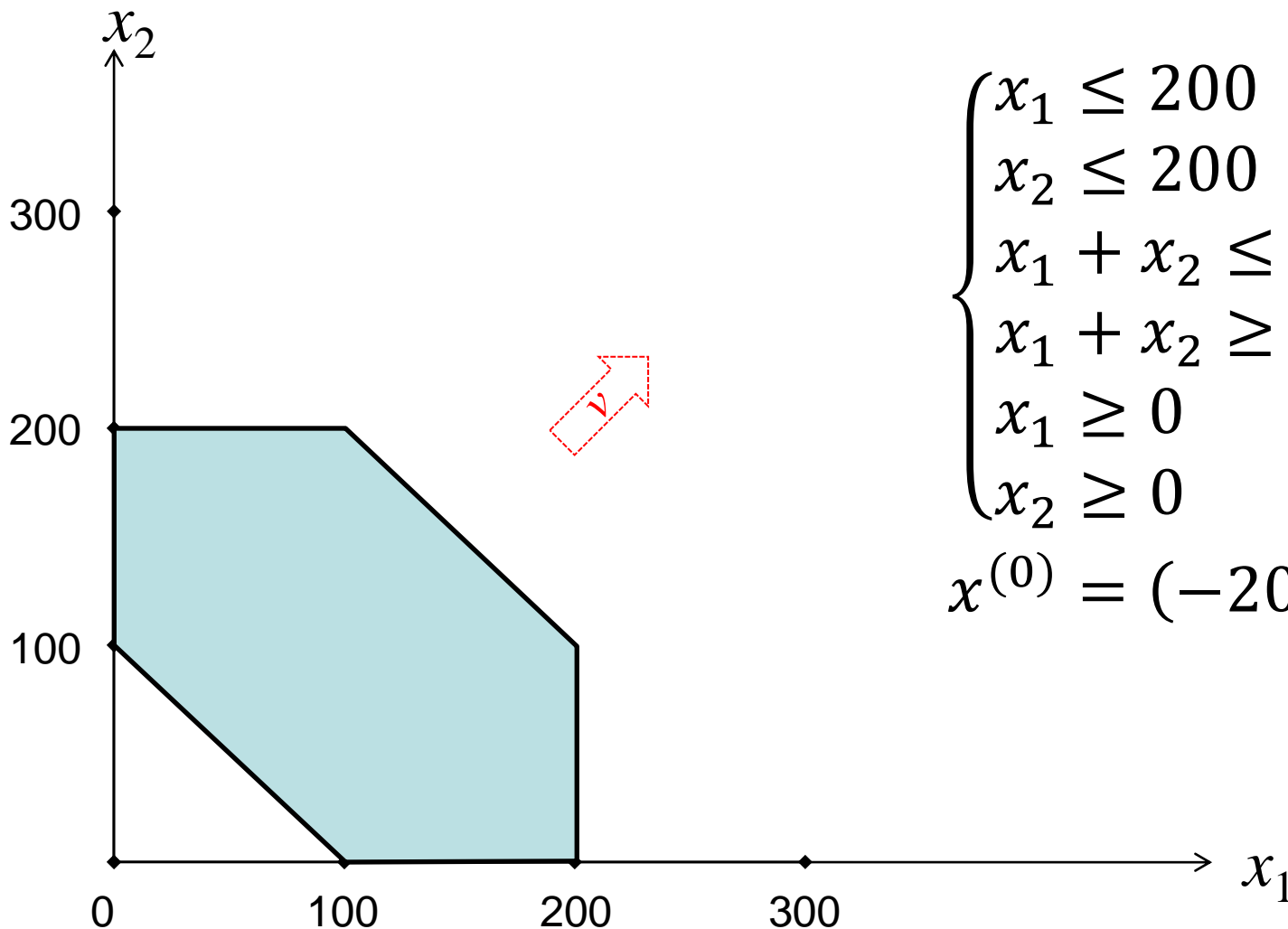
Тестовый пример

$$\left\{ \begin{array}{rcccccl} x_0 & & & & \leq & 200 \\ & x_1 & & & \leq & 200 \\ & & \ddots & & \dots & \dots \\ & & & x_{n-1} & \leq & 200 \\ x_0 & + x_1 & \dots & + x_{n-1} & \leq & 200(n-1) + 100 \\ x_0 & + x_1 & \dots & + x_{n-1} & \leq & -100 \\ -x_0 & & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & \ddots & & \dots & \dots \\ & & & -x_{n-1} & \leq & 0 \end{array} \right.$$

Количество переменных: n

Количество неравенств: $m = 2n + 2$

Тестовый пример при $n=2$



$$\begin{cases} x_1 \leq 200 \\ x_2 \leq 200 \\ x_1 + x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 \geq 100 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (-200, -200)$$

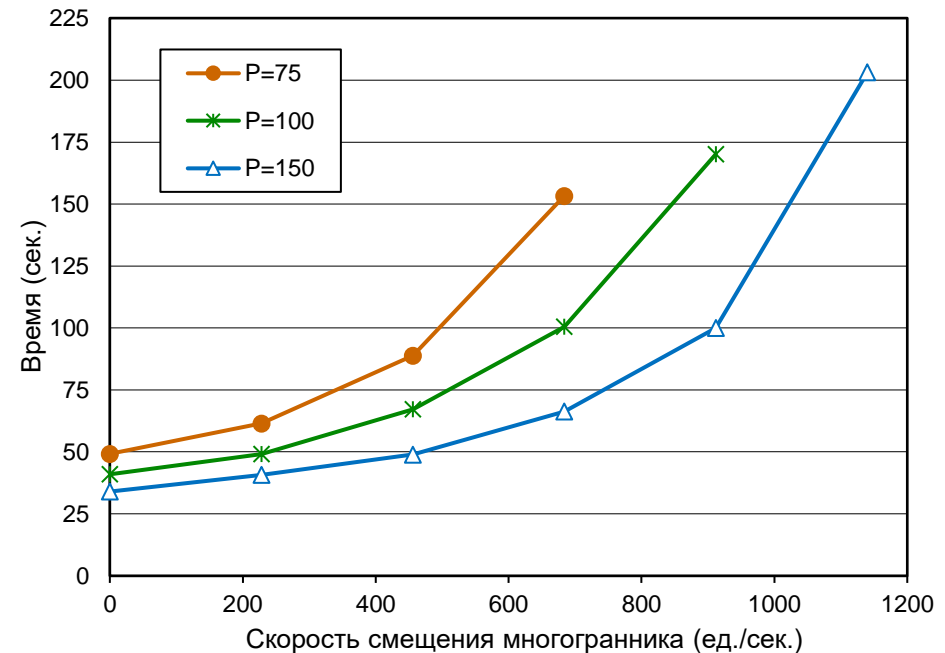
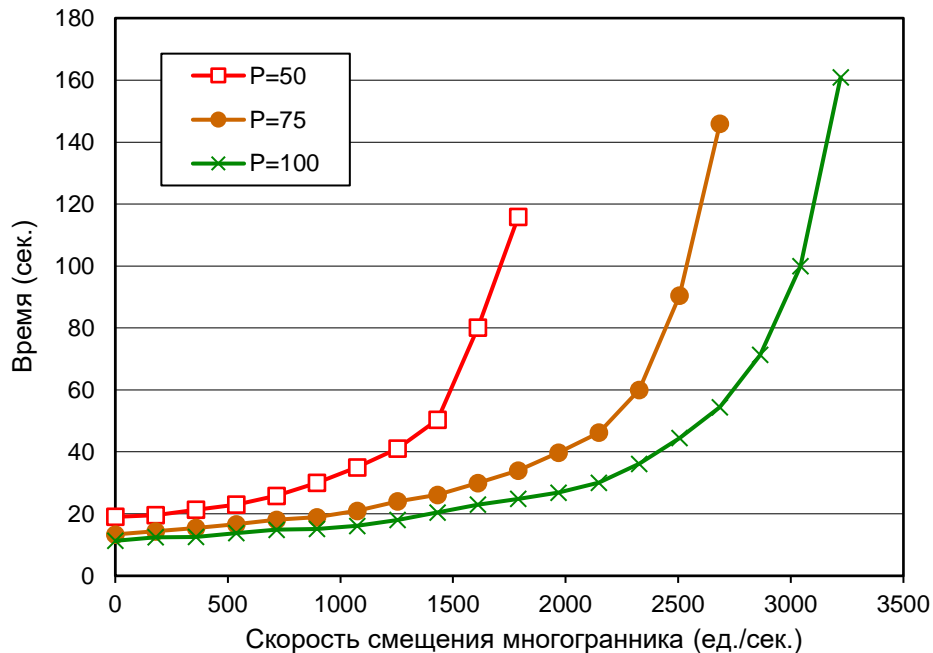
Суперкомпьютер «Торнадо ЮУрГУ»



| | |
|--------------------------|---|
| Количество узлов: | 384 |
| Тип процессоров: | 2 x Intel Xeon X5680 (12 ядер по 3.33 ГГц; 2 потока на ядро) |
| Оперативная память узла: | 24 Гб |
| Тип сопроцессора: | Intel Xeon Phi SE10X: (61 ядро по 1.1 ГГц; 4 потока на ядро) |
| Память сопроцессора: | 8 Гб |
| Тип системной сети: | InfiniBand QDR |
| Тип управляющей сети: | Gigabit Ethernet |
| Операционная система: | Linux CentOS 6.2 |

Вычислительные эксперименты

P – количество процессорных узлов
 $\lambda = 140$



Количество переменных: 32 000
Количество неравенств: 64 002

Количество переменных: 54 000
Количество неравенств: 108 002

Спасибо за внимание!