Параллельная реализация следящего алгоритма для решения нестационарных задач линейного программирования

К.ф.-м.н. И.М. Соколинская, д.ф.-м.н. Л.Б. Соколинский,
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

Нестационарная задача линейного программирования

$$\max\left\{\left\langle c, x\right\rangle \mid Ax \le b, x \ge 0\right\}$$

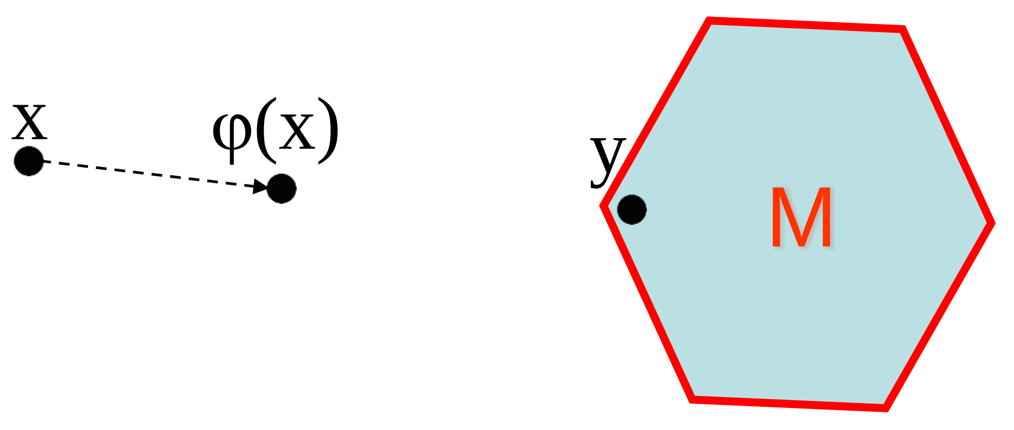
- Размерность: 10^4-10^5
- Количество неравенств: 10^5-10^6
- Период изменения исходных данных (A,b,c): 10^{-2}-10^{-3} сек.

Фейеровское отображение

$\varphi \in \{R^n \to R^n\}$ – M -фейеровское, если

$$\varphi(y) = y,\ \forall y \in M\ ;$$

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|,\ \forall y \in M,\ \forall x \notin M.$$

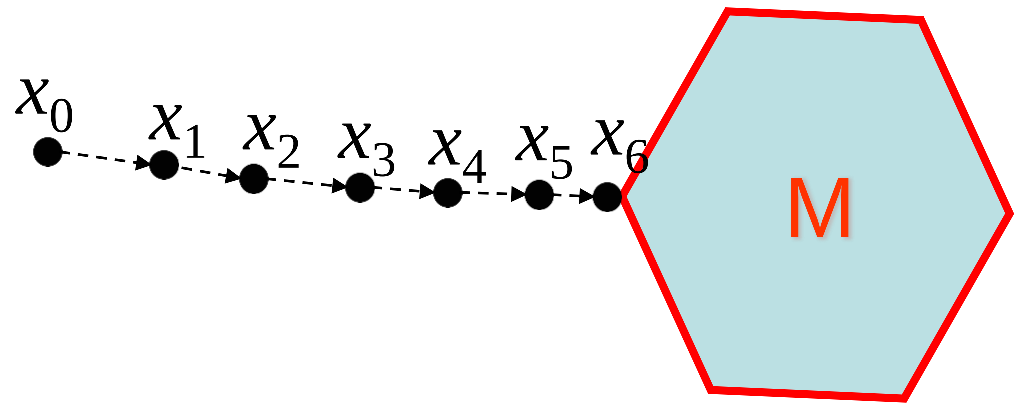


Фейеровский процесс

$$\varphi^s(x) = \underbrace{\varphi \ldots \varphi}_{s}(x)$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^n$$

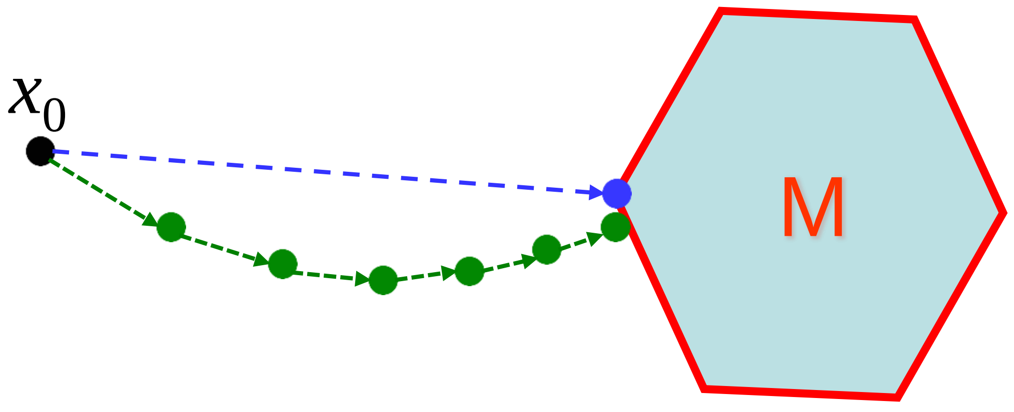
$$\{\varphi^s(x_0)\}_{s=0}^{+\infty}$$



$$x_i = \varphi^i(x_0)$$

Непрерывное однозначное М-фейеровское отображение сходится к точке, принадлежащей М (М - выпуклое ограниченное множество)

Псевдопроектирование



проектирование

псевдопроектирование

Псевдопроектирование (φ-проектирование)

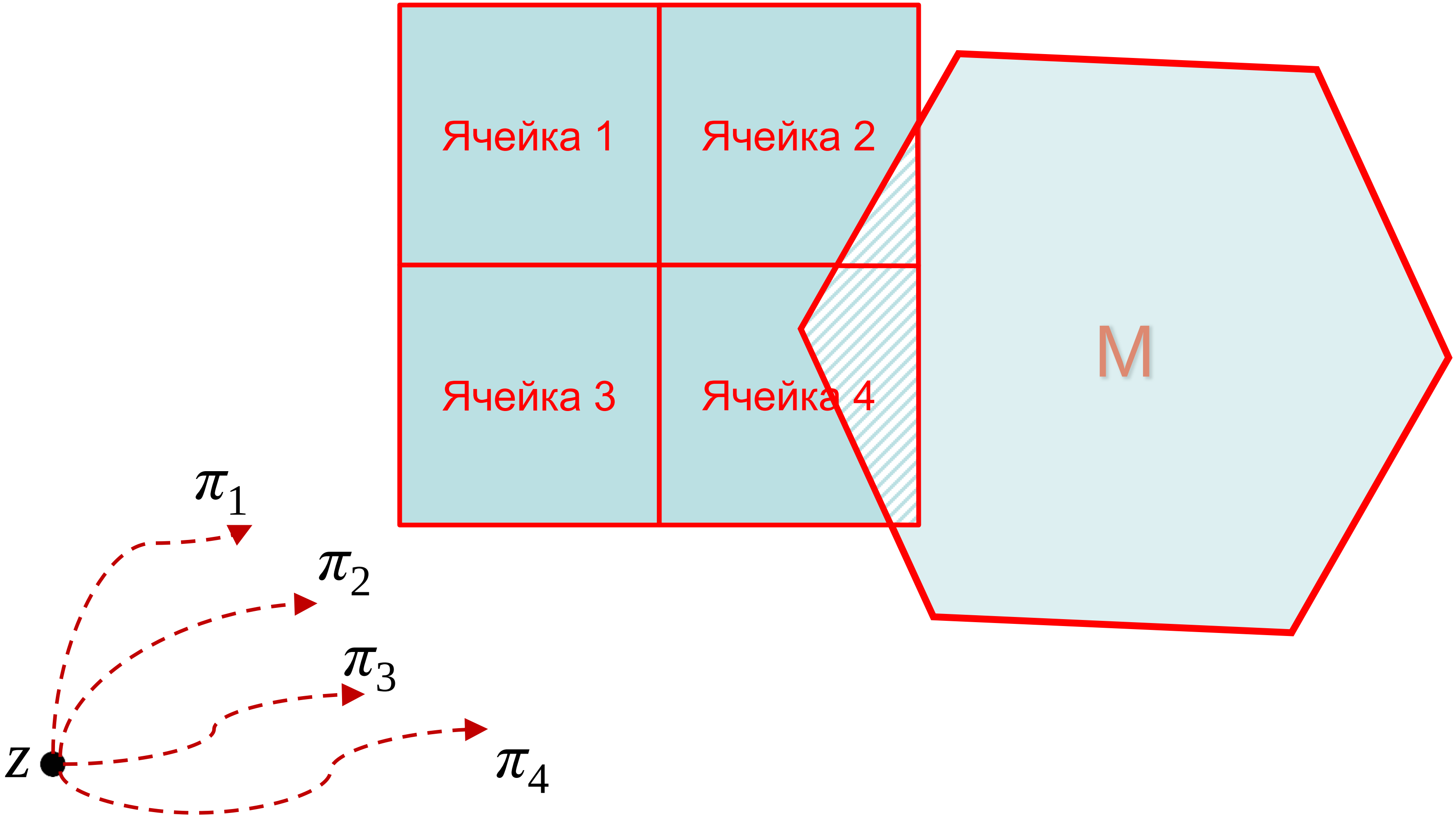
$\varphi \in \mathbf{F}_M$ – однозначное непрерывное отображение.

φ-проектирование (*псевдопроектирование*) $x \in \mathbb{R}^n$ на M – это отображение $\pi_M^{\varphi} \in \left\{ \mathbb{R}^n \to M \right\}$:

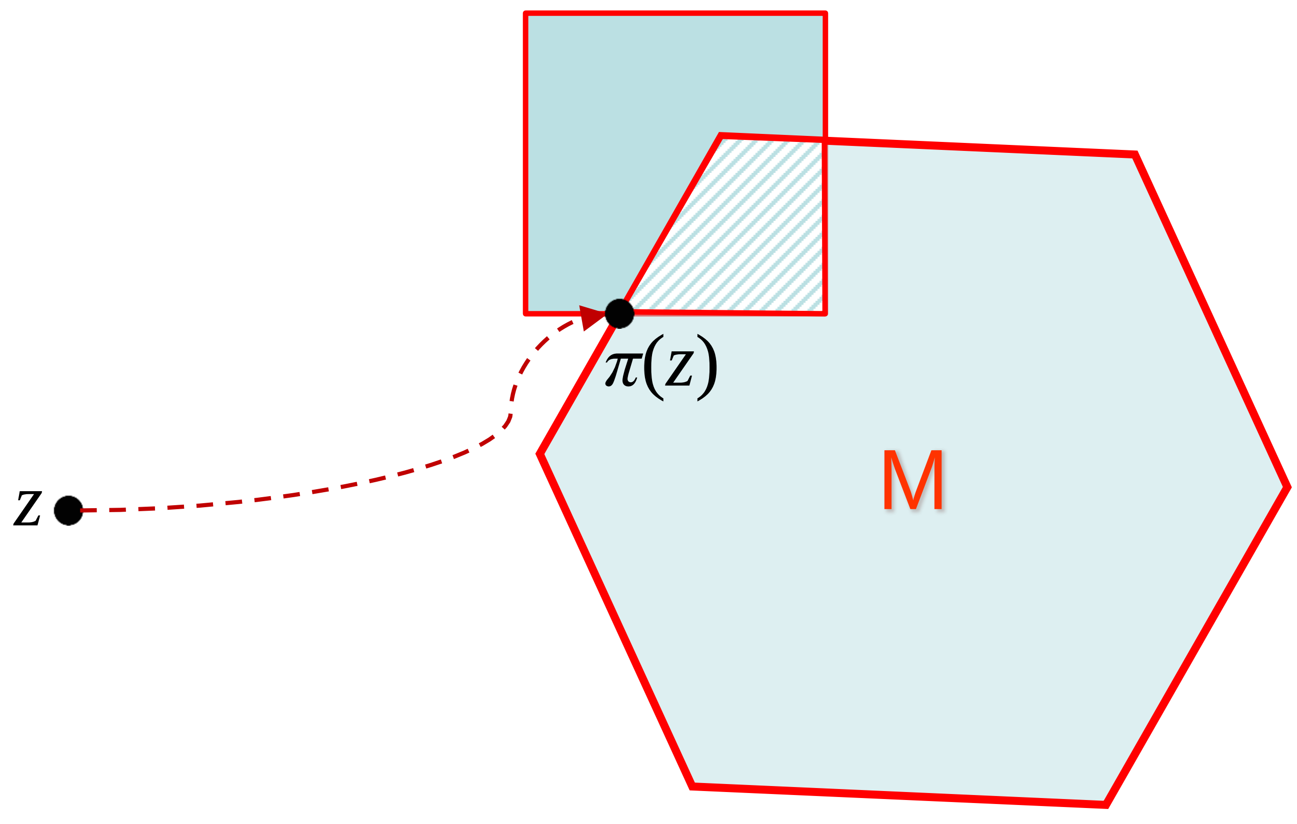
$$\pi_M^{\varphi}(x) = \lim_{s \to \infty} \varphi^s(x).$$

Точка $\pi_M^{\varphi}(x)$ – *псевдопроекция* точки x на M.

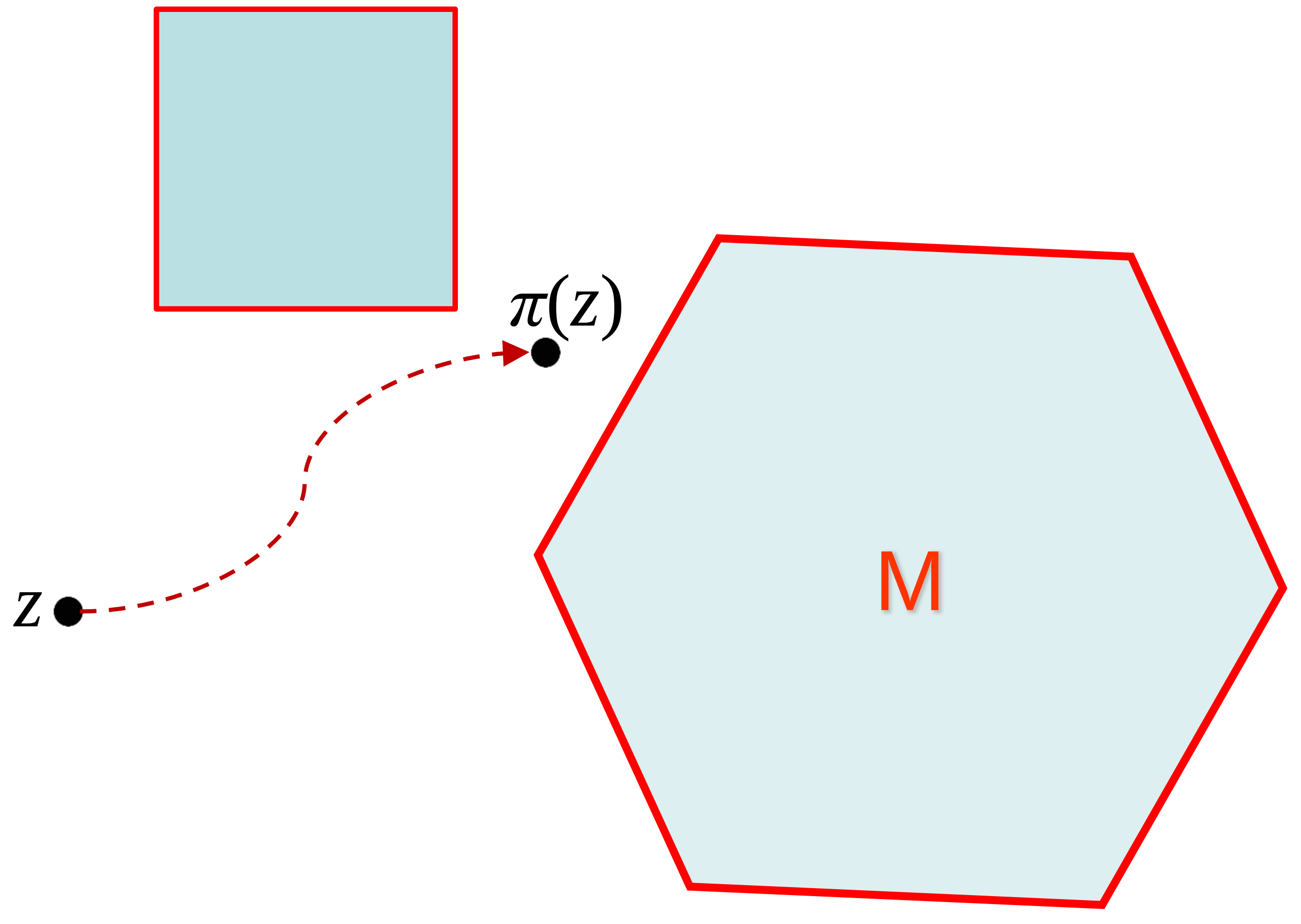
Идея следящего алгоритма



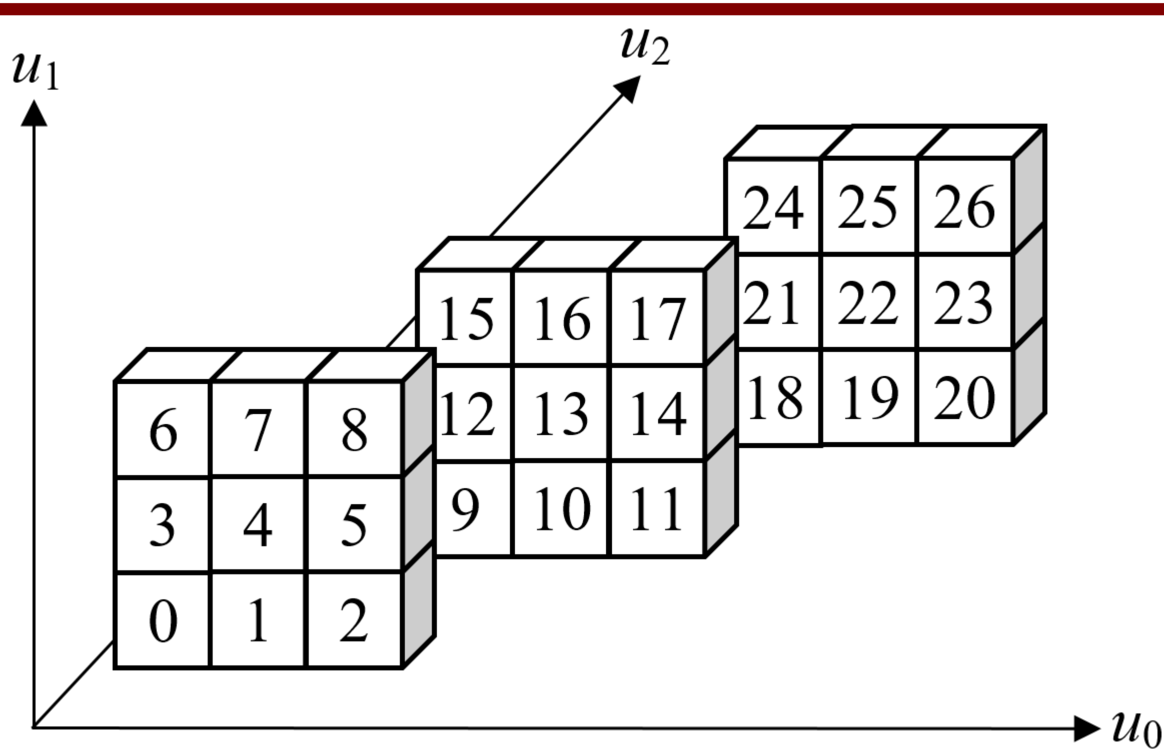
Поведение при непустом пересечении



Поведение при пустом пересечении



Линейная нумерация ячеек следящей области



При n=3 целочисленные координаты (1,0,2) задают ячейку с номером

$19 = 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2$

α – ячейка с целочисленными координатами $(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n\text{-}1})$

Порядковый номер ячейки α:

$$k_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i n^i$$

Выражение целочисленных координат $(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n\text{-}1})$ ячейки α через ее номер k_α

$$k_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i n^i$$

$$\alpha_0 = k_\alpha \bmod n$$

$$\alpha_1 = \frac{k_\alpha - \alpha_0}{n} \bmod n$$

$$\alpha_2 = \frac{k_\alpha - \alpha_0 - \alpha_1 n}{n^2} \bmod n$$

$$\ldots\ldots$$

$$\alpha_i = \frac{k_\alpha - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j n^j}{n^i} \bmod n$$

Избавление от операции возведения в степень

$$
\begin{cases}
\alpha_0 = k_\alpha \bmod n \\
\alpha_1 = \dfrac{k_\alpha - \alpha_0}{n} \bmod n \\
\alpha_2 = \dfrac{k_\alpha - \alpha_0 - \alpha_1 n}{n^2} \bmod n \\
\ldots\ldots \\
\alpha_i = \dfrac{k_\alpha - \sum\limits_{j=0}^{i-1} \alpha_j n^j}{n^i} \bmod n
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\alpha_0 = k_\alpha - (k_\alpha \div n) \cdot n \\
\alpha_1 = \ k_\alpha \div n \ \bmod n \\
\alpha_2 = \ (k_\alpha \div n) \div n \ \bmod n \\
\ldots\ldots \\
\alpha_i = \alpha_i = \underbrace{\ k_\alpha \div n \ \ldots \ \div n\ }_{i} \bmod n
\end{cases}
$$

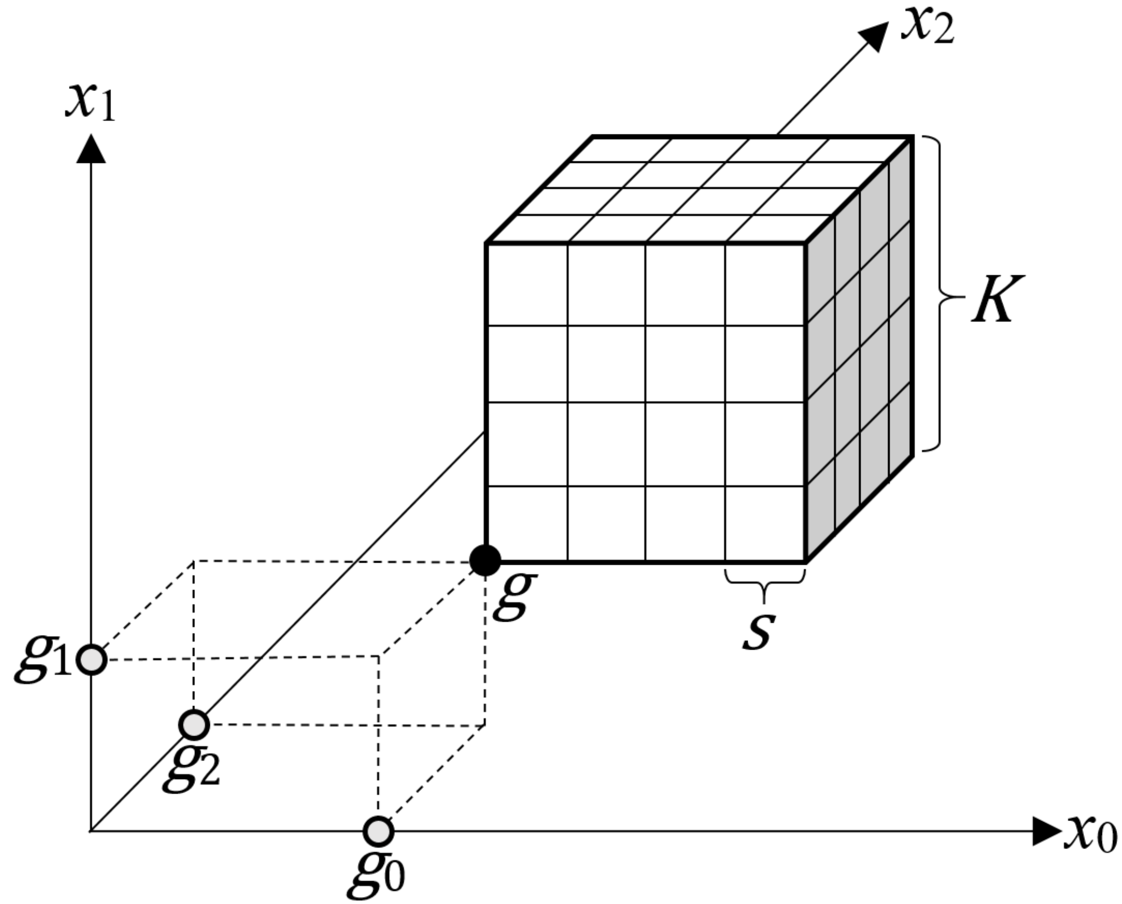
$\div$ – операция целочисленного деления

Задание кубической следящей области

$g = (g_0,\ldots,g_{n\text{-}1})$ - нулевая вершина кубической следящей области

s - шаг сетки

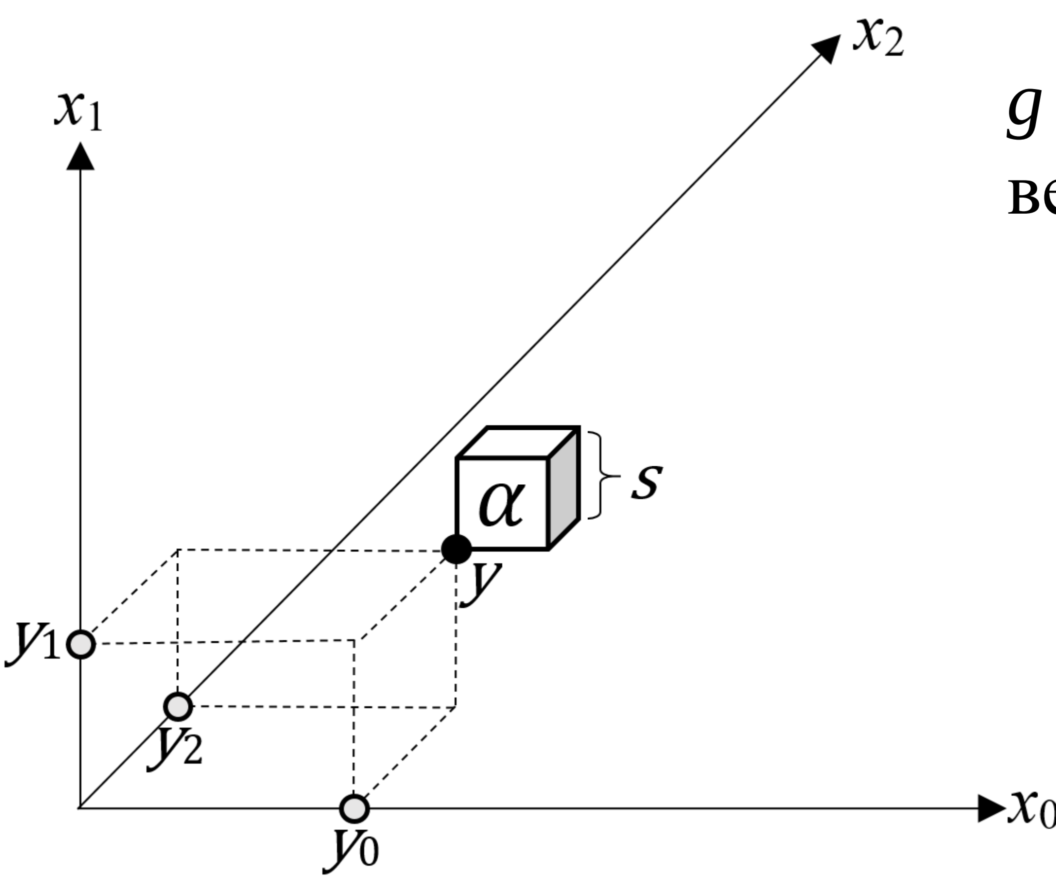
K - количество ячеек в следящей области по одному измерению



Нулевая вершина $y = (y_0,\ldots,y_{n\text{-}1})$ ячейки с целочисленными координатами $\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_{n\text{-}1})$

Целочисленные координаты $\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_{n\text{-}1})$

Декартовы координаты нулевой вершины $y = (y_0,\ldots,y_{n\text{-}1})$



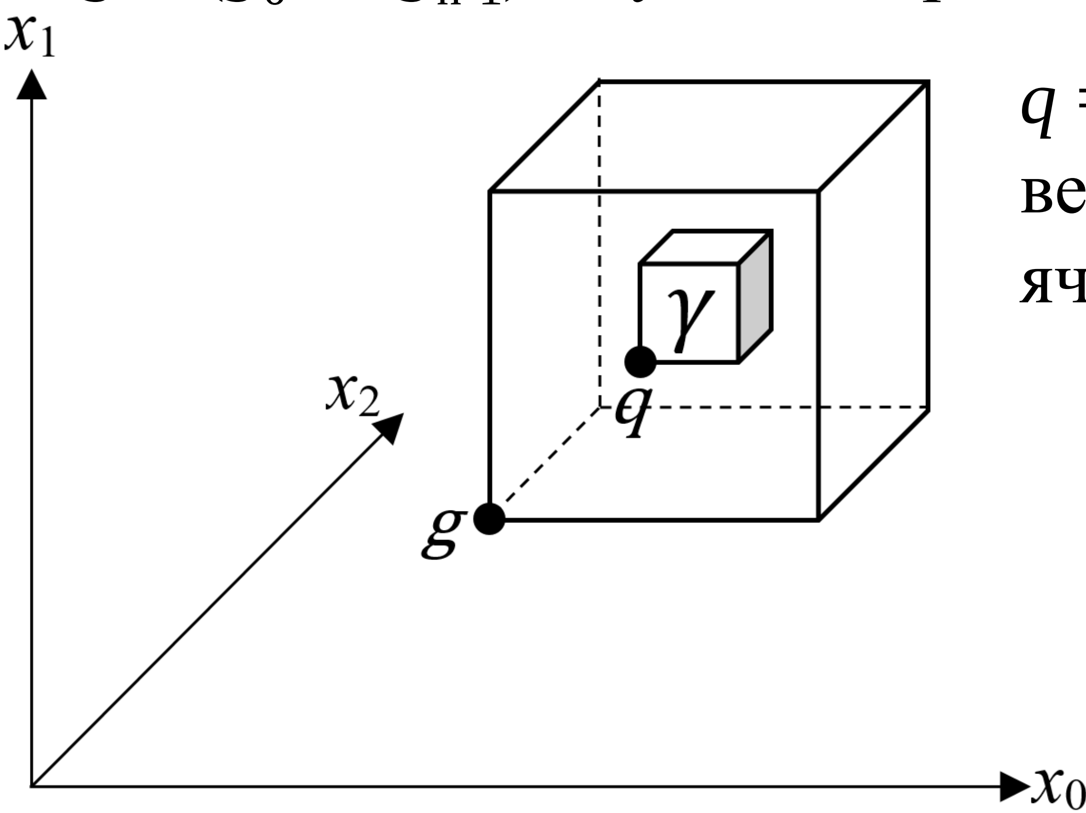
$g = (g_0,\ldots,g_{\text{n-1}})$ - нулевая вершина следящей области

$$y_i = g_i + s\alpha_i$$

Нулевая вершина q центральной ячейки γ следящей области

Целочисленные координаты центральной ячейки $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n\text{-}1})$

$g = (g_0,\ldots,g_{\text{n-1}})$ - нулевая вершина следящей области



$q = (q_0,\ldots,q_{\text{n-1}})$ - нулевая вершина центральной ячейки γ

$$q_i = g_i + s\gamma_i$$

$$\boxed{\gamma_i = \lfloor K/2 \rfloor}$$

Система ограничений для ячейки α с нулевой вершиной y

$y = (y_0,\dots,y_{n-1})$ – нулевая вершина ячейки α

Область внутри ячейки α (включая границы) задается системой из $2n$ неравенств:

$$
\begin{cases}
-x_0 & & & & \le & -y_0 \\
& -x_1 & & & \le & -y_1 \\
& & \dots & & \dots & \dots \\
& & & -x_{n-1} & \le & -y_{n-1} \\
x_0 & & & & \le & y_0 + s \\
& x_1 & & & \le & y_1 + s \\
& & \dots & & \dots & \dots \\
& & & x_{n-1} & \le & y_{n-1} + s
\end{cases}
$$

Система ограничений для ячейки α в матричной форме

$$\boxed{A_\alpha x \le b_\alpha}$$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b_\alpha = \begin{pmatrix} -y_0 \\ -y_1 \\ -y_2 \\ y_0 + s \\ y_1 + s \\ y_2 + s \end{pmatrix}$$

Пересечение многогранника *M* с ячейкой α

$$\boxed{A'x \leq b'}$$

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ A_\alpha \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} b \\ b_\alpha \end{bmatrix}$$

A' – расширенная матрица размера $(m + 2n) \times n$
b' – расширенный столбец с высотой $(m + 2n)$

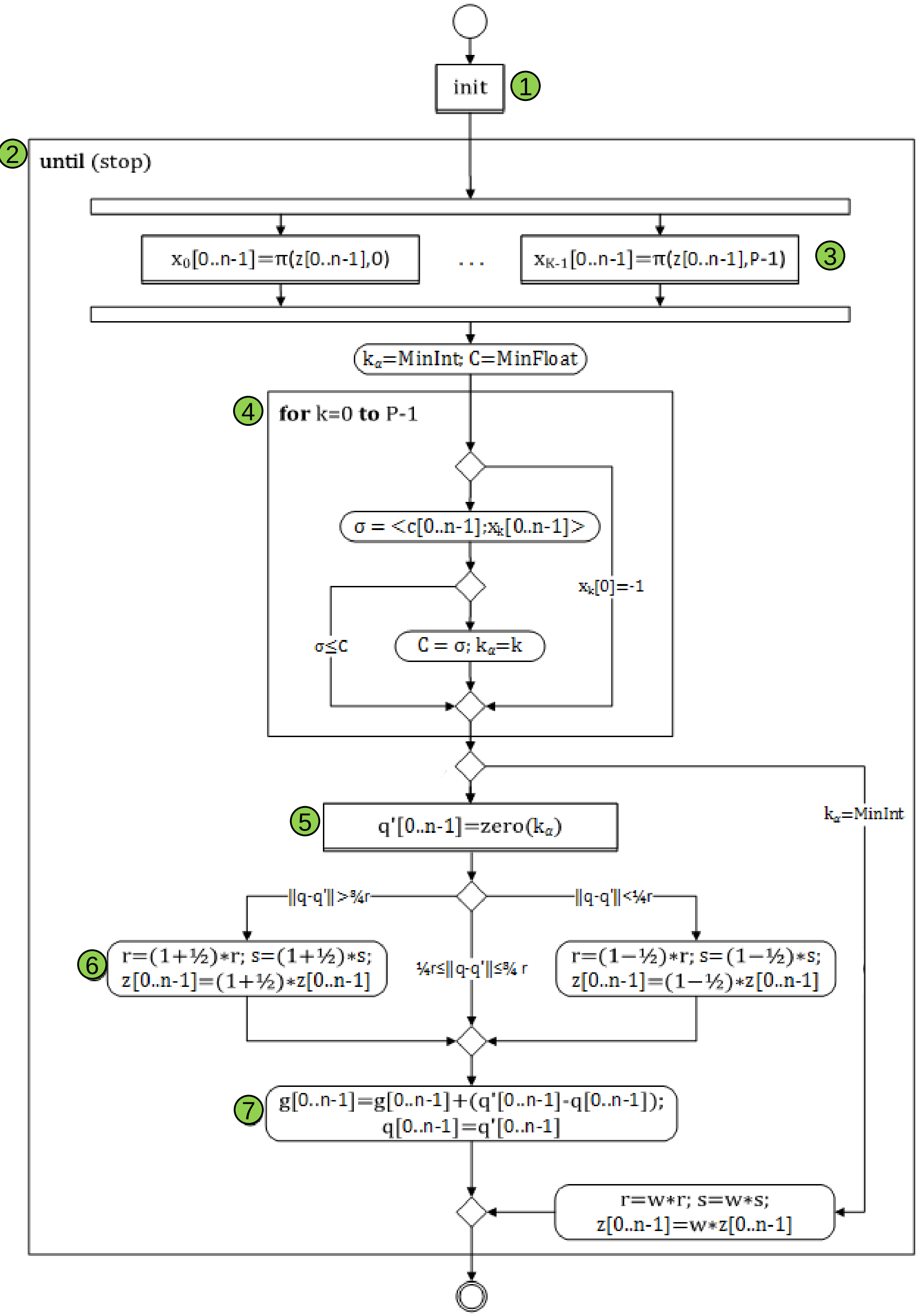


Схема следящего алгоритма

1. Инициализация переменных
2. Основной итерационный цикл **until**
3. Параллельное вычисление псевдопроекций на пересечение многогранника M с каждой ячейкой α
4. Вычисление в цикле **for** номера k_α ячейки, на которой достигается максимум целевой функции (будущая новая центральная ячейка следящей области)
5. Вычисление нулевой вершины q’ новой центральной ячейки
6. Корректировка длины r ребра следящей области, шага сетки s и координат целевой точки z
7. Сдвиг следящей области на вектор (q’-q)

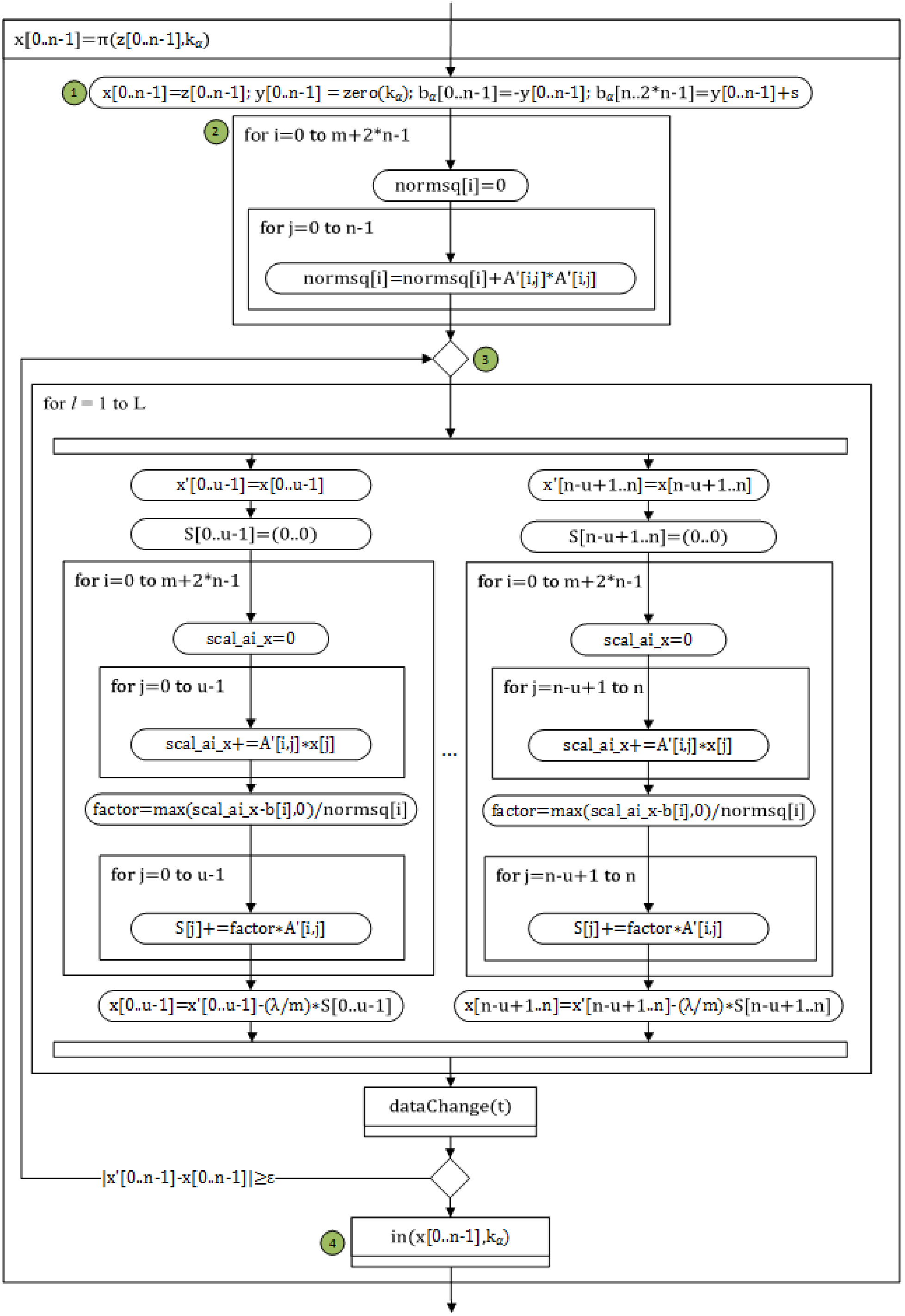


Схема подпрограммы вычисления псевдопроекции

1. Инициализация переменных
2. Вычисление в цикле **for** normsq – вектора квадратов норм строк расширенной матрицы A’
3. Организация итерационного процесса вычисления псевдопроекции по формуле

$$(x_{vu},\dots,x_{(v+1)u-1}) := (x_{vu},\dots,x_{(v+1)u-1}) - \frac{\lambda}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\max\left(\left\langle (a_{i,vu},\dots,a_{i,(v+1)u-1}),(x_{vu},\dots,x_{(v+1)u-1})\right\rangle - b_i, 0\right)}{\left\|a_i\right\|^2}\cdot(a_{i,vu},\dots,a_{i,(v+1)u-1})$$

4. Если точка псевдопроекции x не принадлежит ячейке с номером k_α, то x_0 присваивается значение -1

Дальнейшие исследования

- Экспериментальное исследование следящего алгоритма
- Аналитическое исследование следящего алгоритма (в т.ч. доказательство теоремы сходимости)

Спасибо за внимание!