Семинар НИУ ВШЭ по высокопроизводительным вычислениям
(Москва, 8 октября 2019 г.)

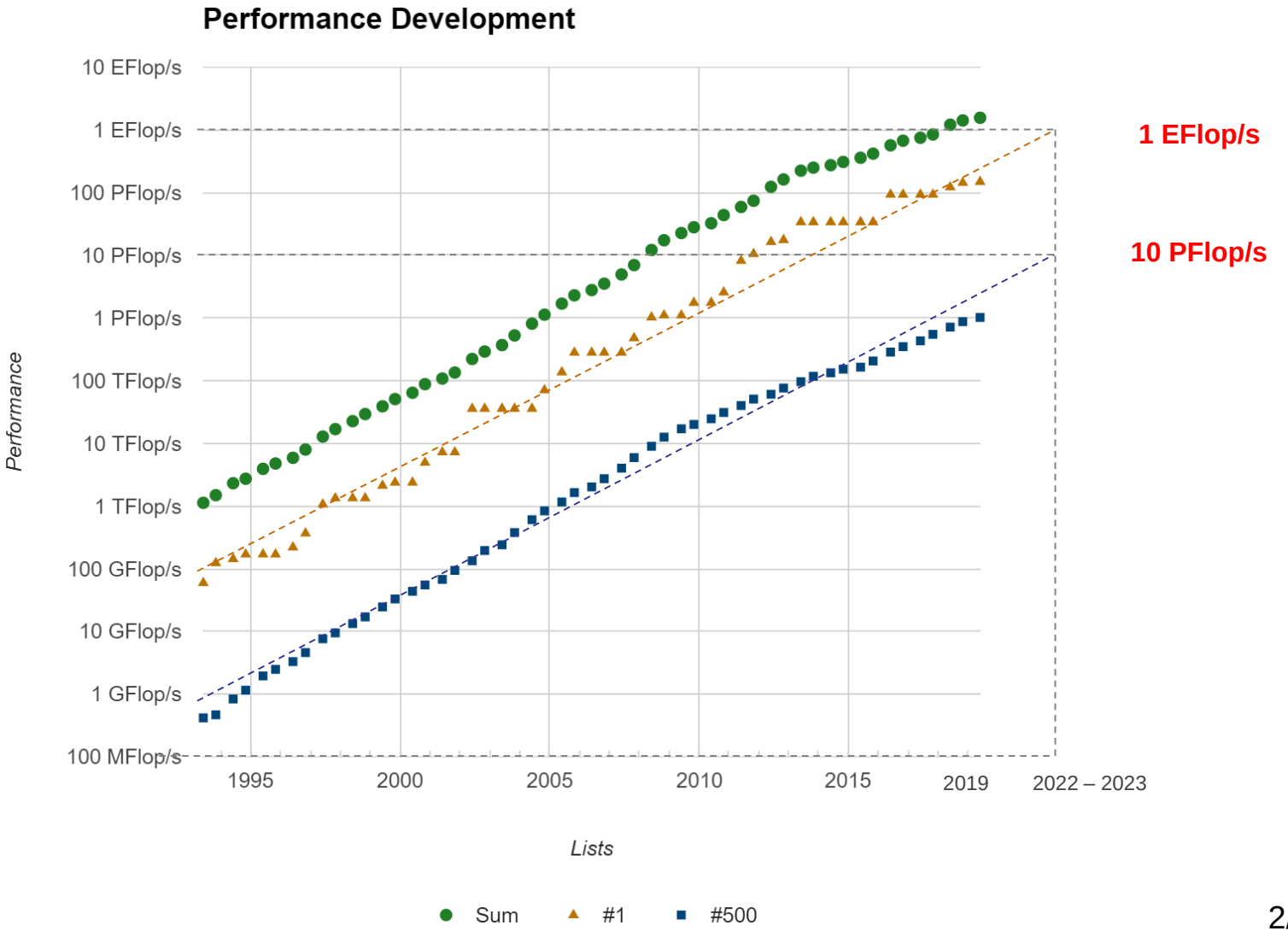
BSF: модель параллельных вычислений для многопроцессорных систем с распределенной памятью

д.ф.-м.н., профессор Л.Б. Соколинский

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)
Челябинск

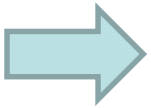
Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-07-00352а, Правительства РФ в соответствии с Постановлением №211 от 16.03.2013 г. (соглашение № 02.A03.21.0011) и Министерства образования и науки РФ (государственное задание 2.7905.2017/8.9).

TOP500 (июнь 2019)



Изменение основной парадигмы дизайна численных алгоритмов

Разработать алгоритм, эффективно работающий на малых вычислительных ресурсах

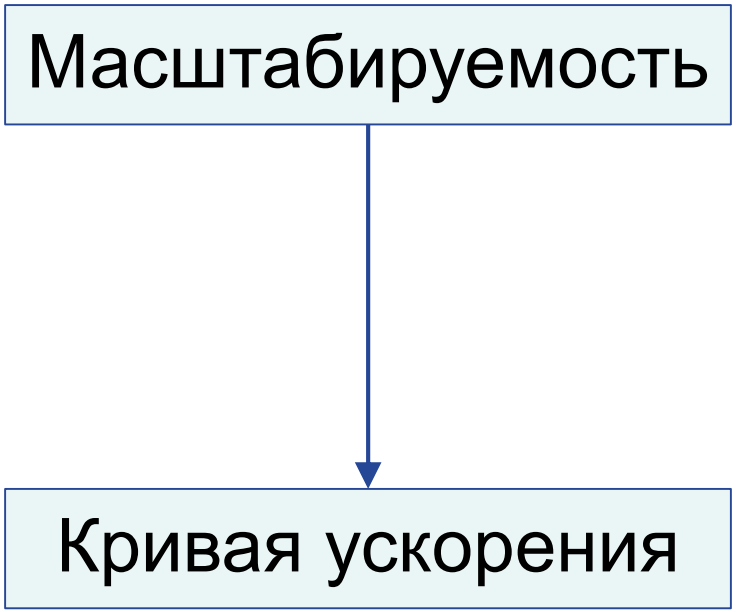


Разработать алгоритм, способный эффективно использовать большие вычислительные ресурсы

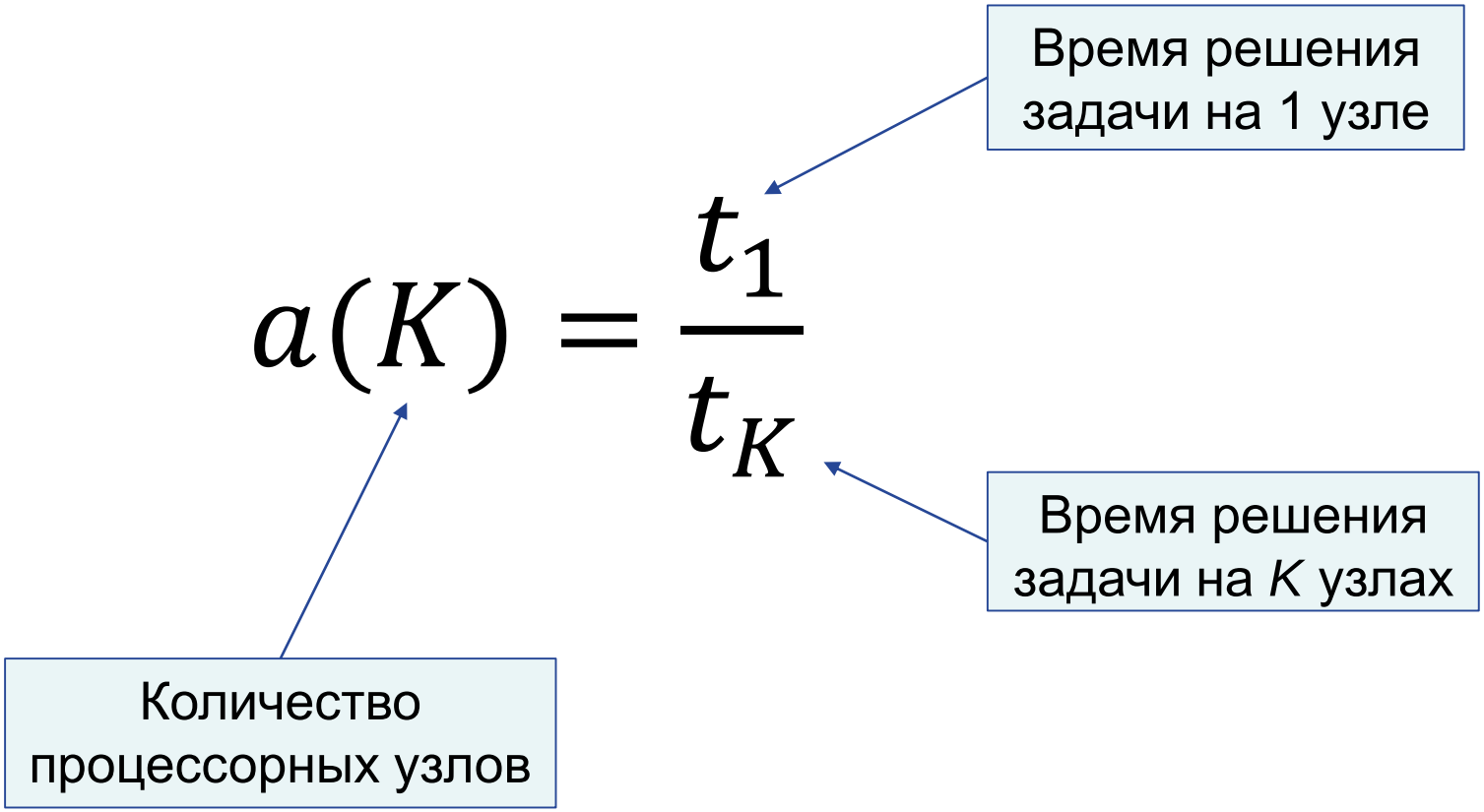
1985

2015

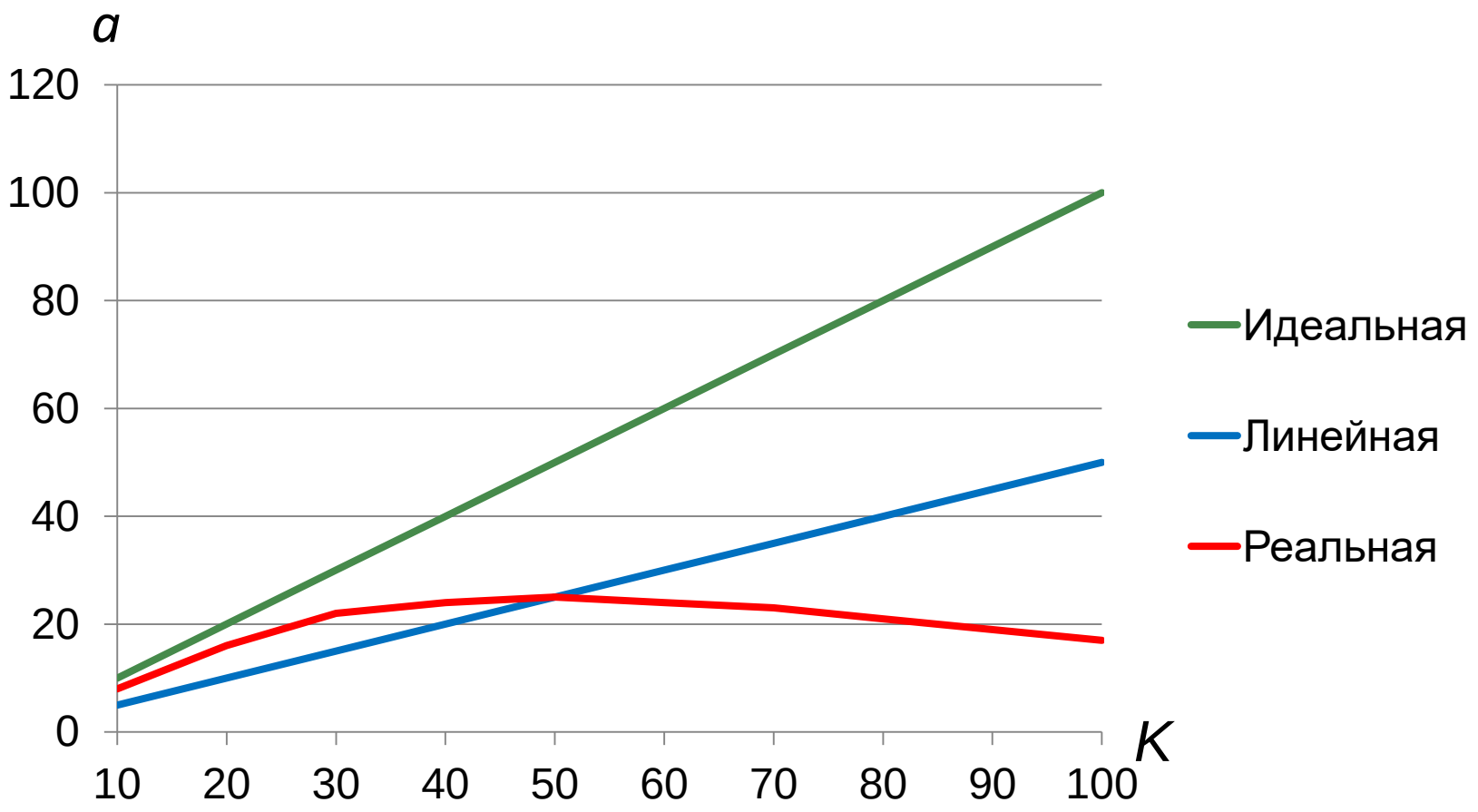
Главная характеристика современного параллельного численного алгоритма



Ускорение


Время решения задачи на 1 узле
$a(K) = \frac{t_1}{t_K}$
Время решения задачи на K узлах
Количество процессорных узлов

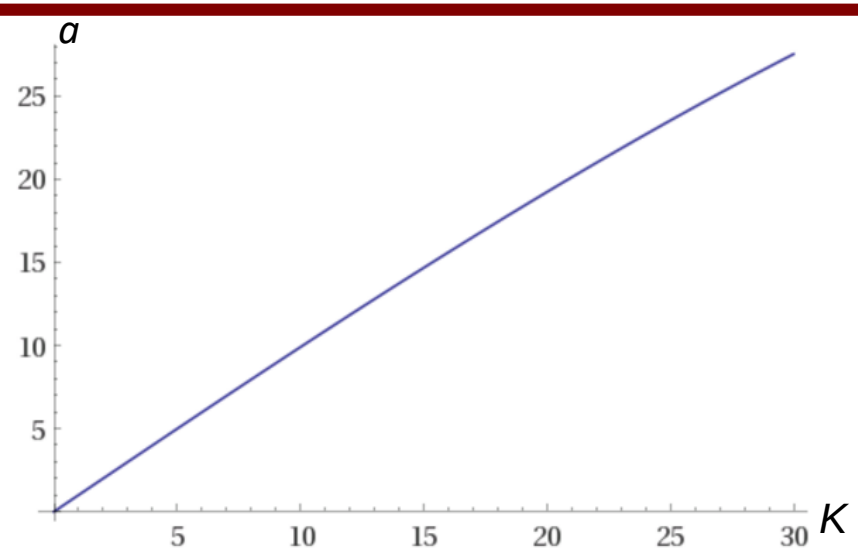
Кривая ускорения – основной индикатор масштабитруемости

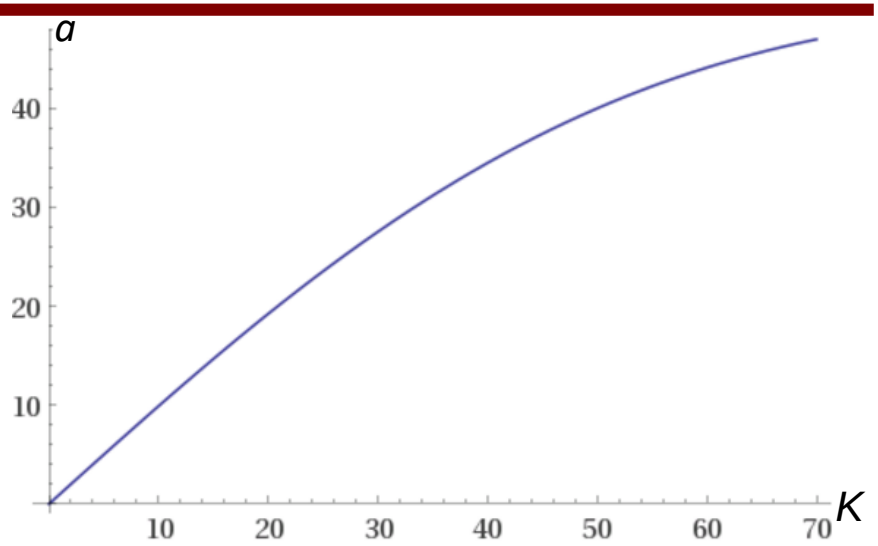


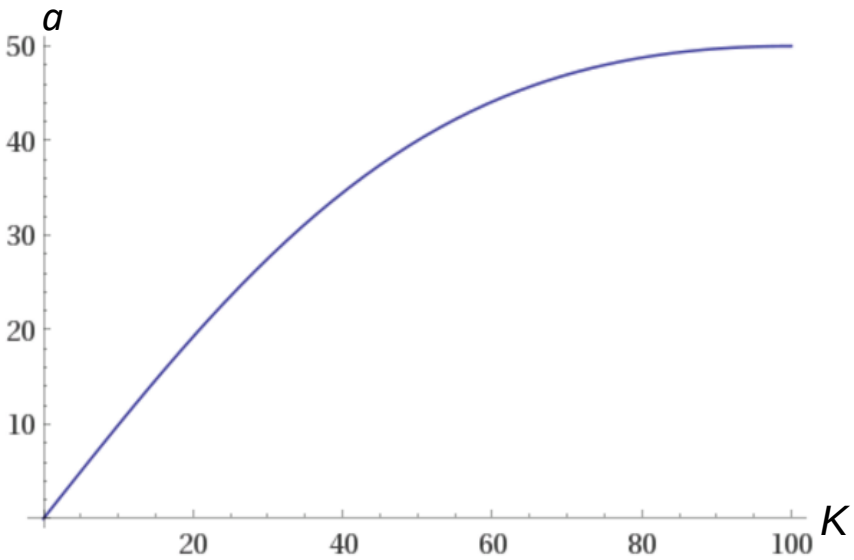
Алгоритм является хорошо масштабируемым, если:

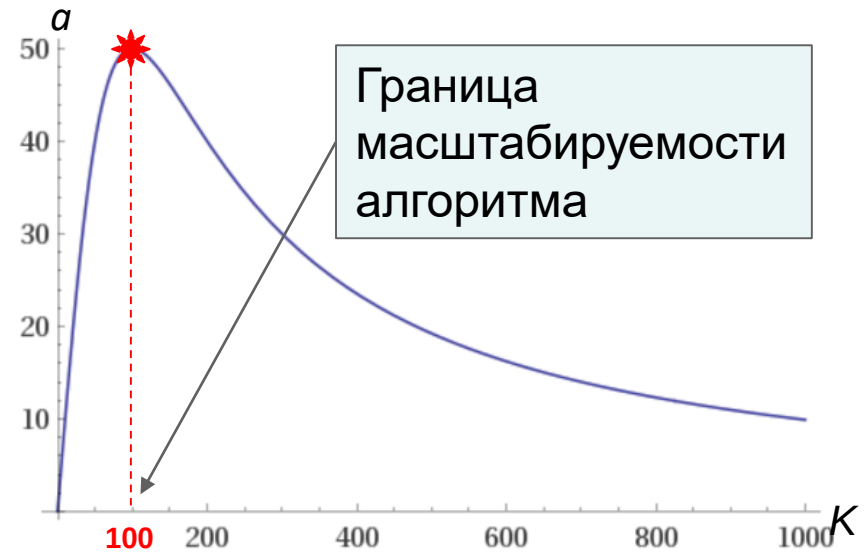
кривая ускорения близка к линейной

Кривая ускорения реальной задачи на кластерной вычислительной системе



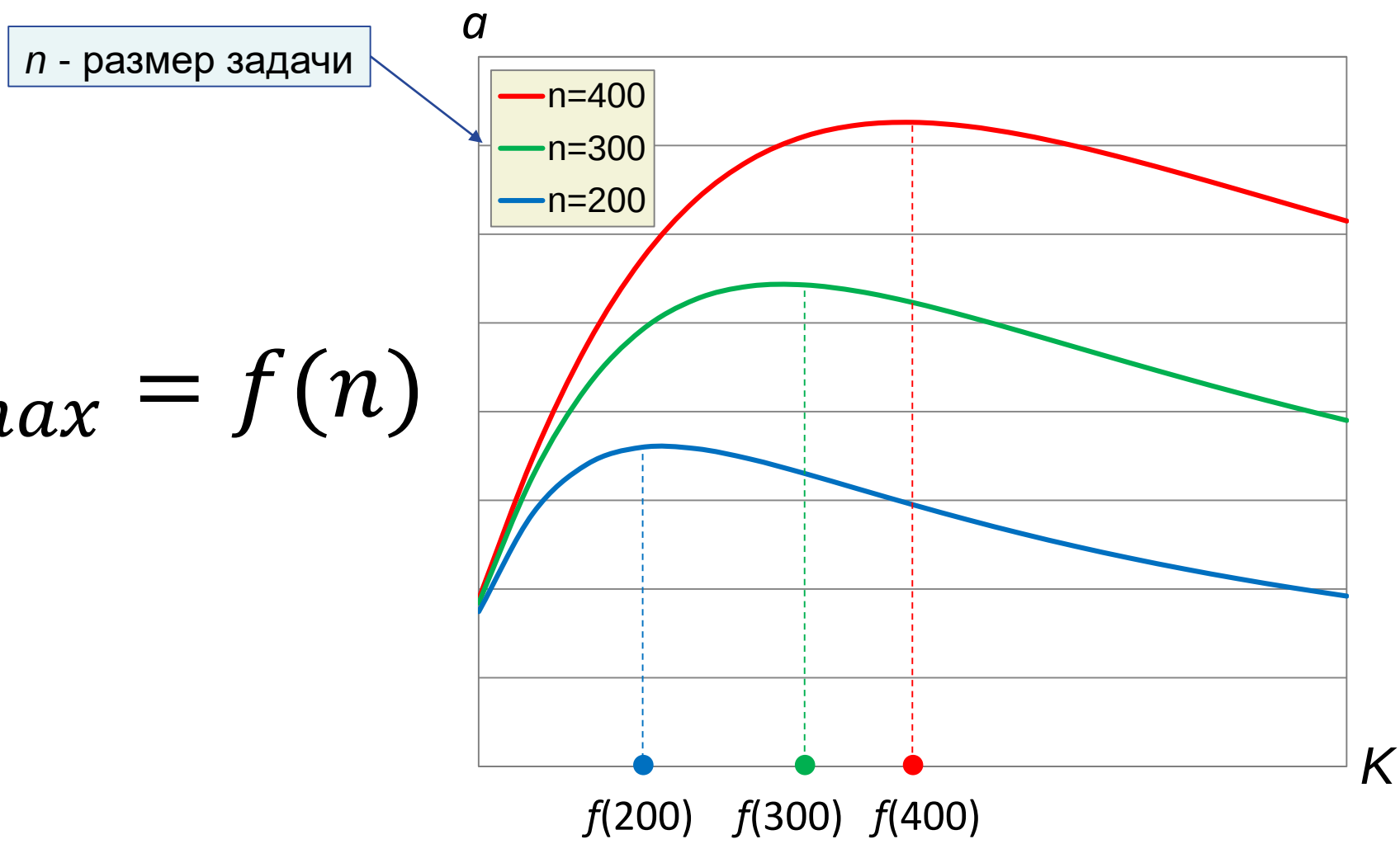






Необходима функция *f* для определения границы масштабируемости алгоритма **до** написания программы

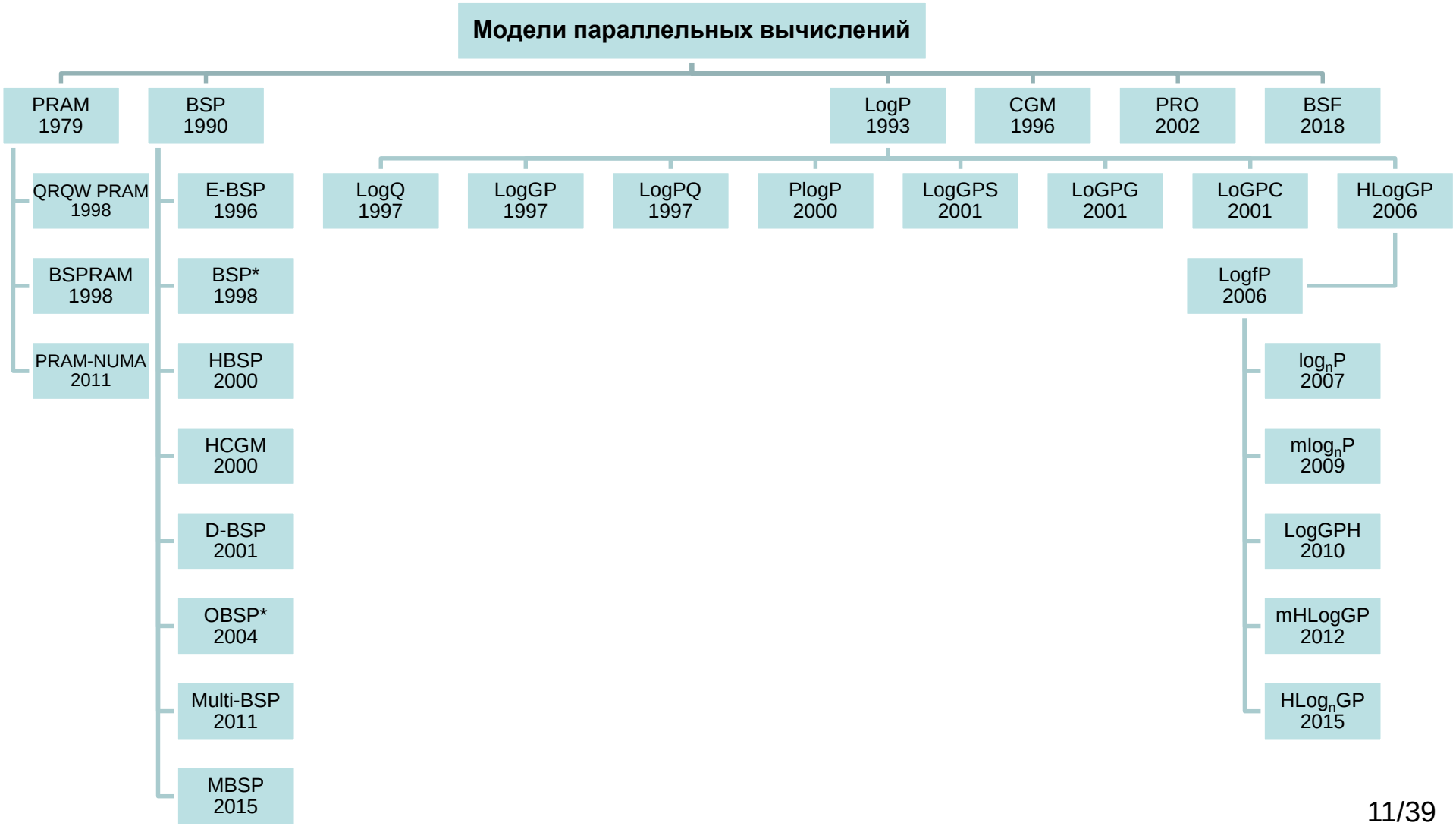
$$K_{max} = f(n)$$



Модель параллельных вычислений

- Модель параллельных вычислений – фреймворк (система правил и ограничений), включающий в себя:
  - абстрактное описание компьютера
  - правила написания алгоритмов и программ
  - способ их параллельного выполнения
  - стоимостную метрику для оценки времени выполнения
- Используется для разработки эффективных алгоритмов и программ
- Позволяет оценить реальную вычислительную сложность алгоритма и прогнозируемое быстродействие программы на различных вычислительных системах

Дерево моделей параллельных вычислений



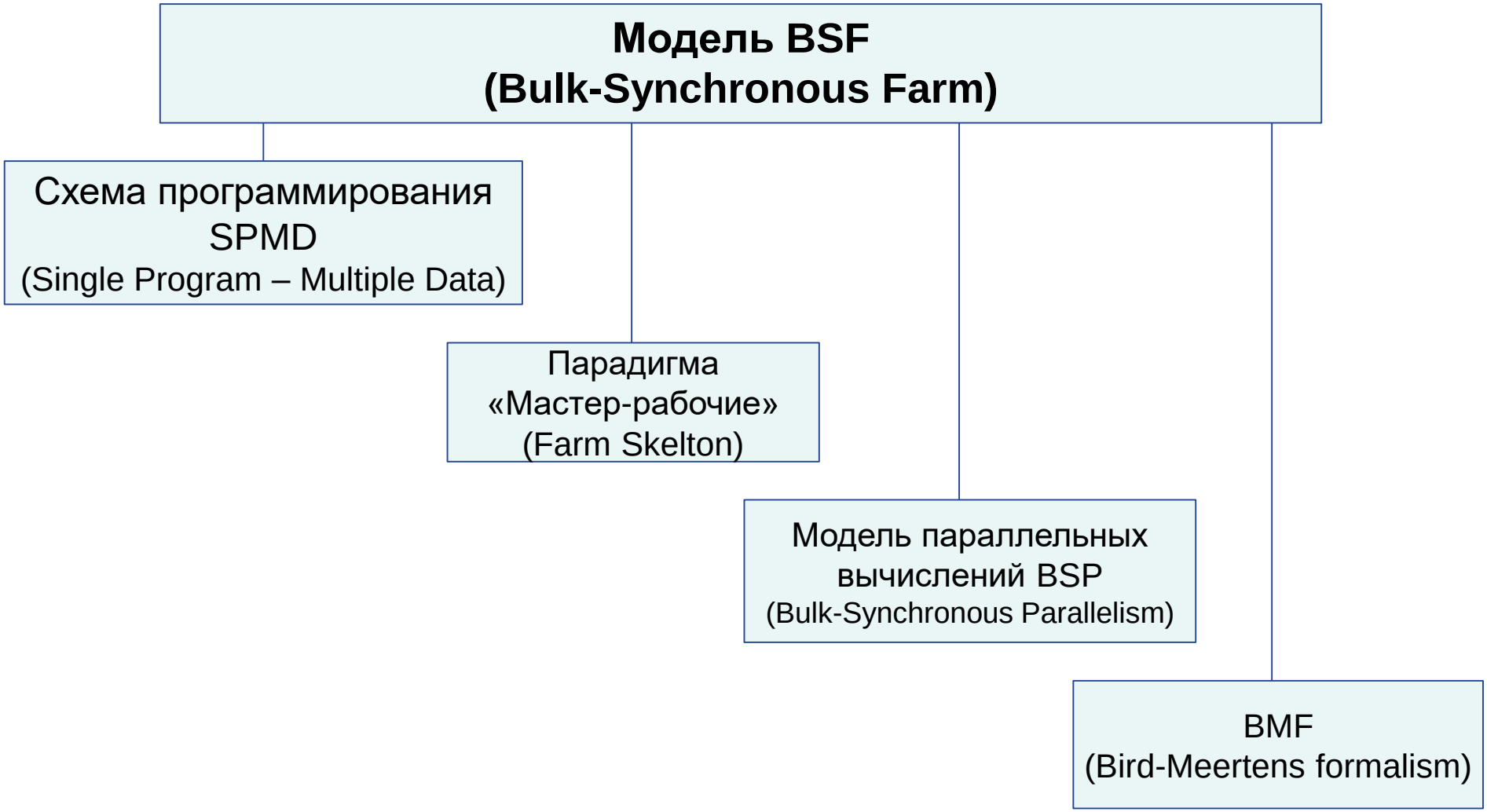
Борьба противоположностей в моделях параллельных вычислений

1. **Необходимо сужать класс многопроцессорных архитектур: для разных архитектур нужны разные модели**
2. **Необходимо сужать класс алгоритмов: для разных алгоритмов нужны разные модели**
3. **Необходимо накладывать более жесткие ограничения на структуру параллельной программы**

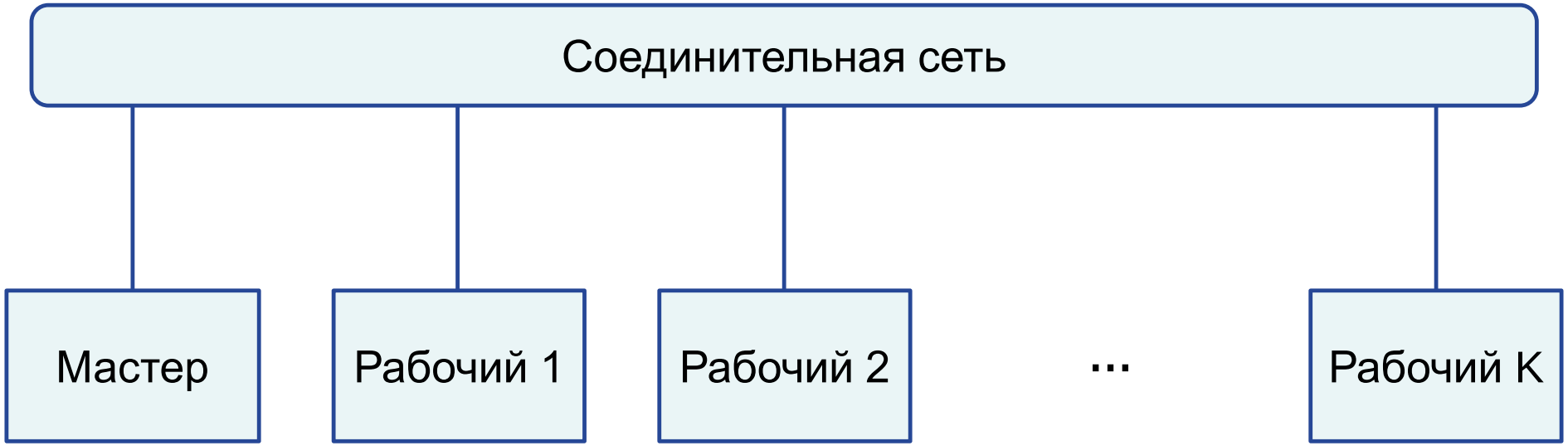
Модель параллельных вычислений BSF (Bulk-Synchronous Farm)

- Область применения:
  - Многопроцессорные системы с распределенной памятью
  - Параллельные итерационные алгоритмы с высокой вычислительной сложностью
- Позволяет предсказать:
  - ускорение параллельного алгоритма
  - **границу масштабируемости параллельного алгоритма** (уникальное качество модели BSF)

Фундамент модели BSF



BSF-компьютер



Процессорные узлы

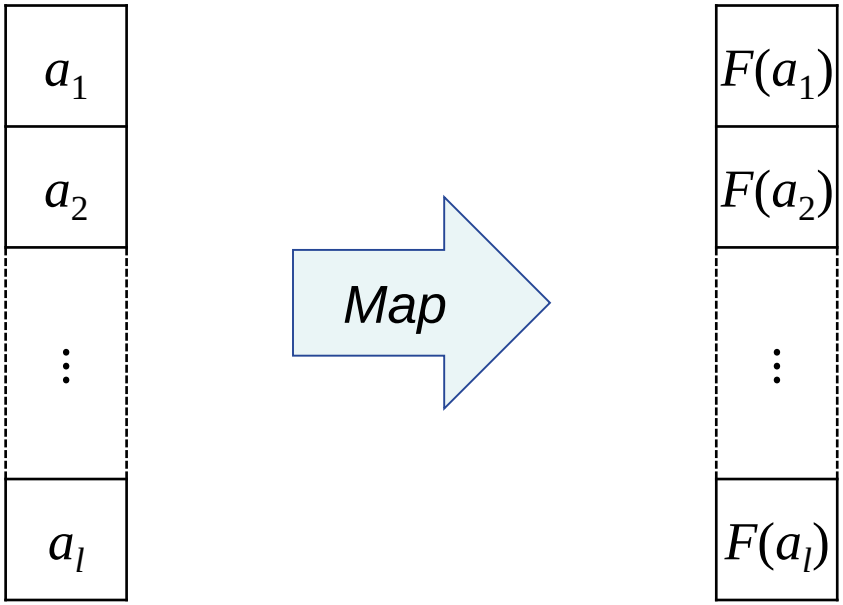
Представление алгоритма в виде операций над списками

- Функции высшего порядка:
  - Map
  - Reduce

  (Формализм Бёрда-Миртенса)

Функция высшего порядка *Map*

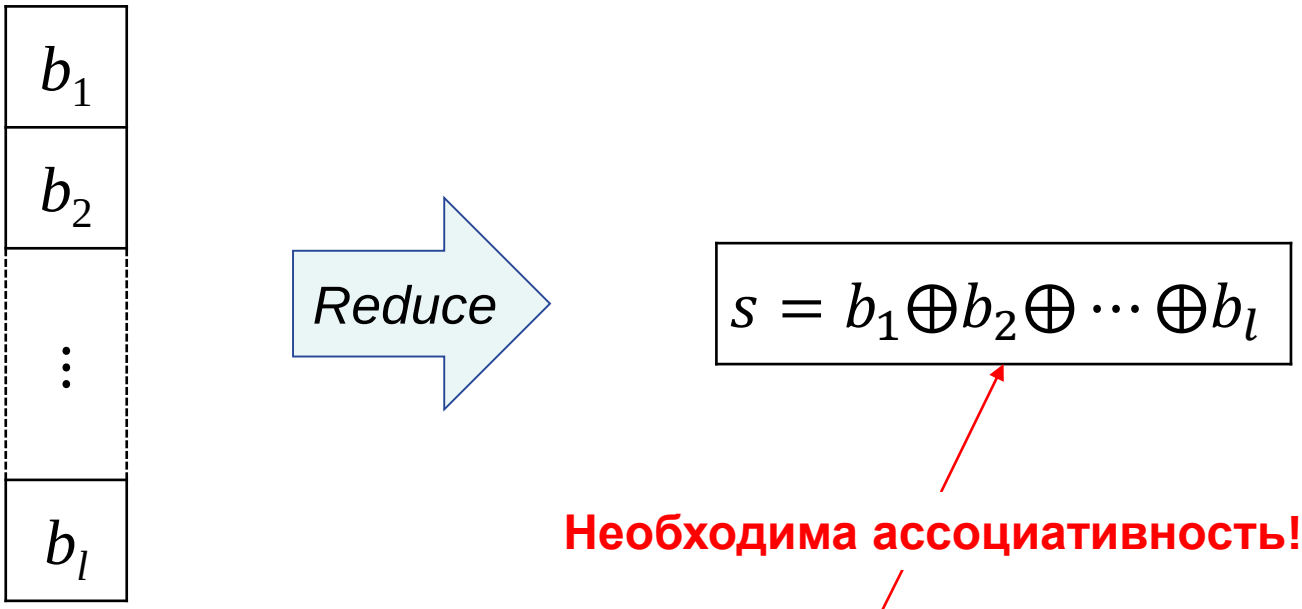
Неограниченный параллелизм



$$Map(F, [a_1, \ldots, a_l]) = [F(a_1), \ldots, F(a_l)]$$

Функция высшего порядка *Reduce*

Иерархический параллелизм



$$Reduce(\oplus, [b_1, \ldots, b_l]) = b_1 \oplus \cdots \oplus b_l$$

Иерархический параллелизм

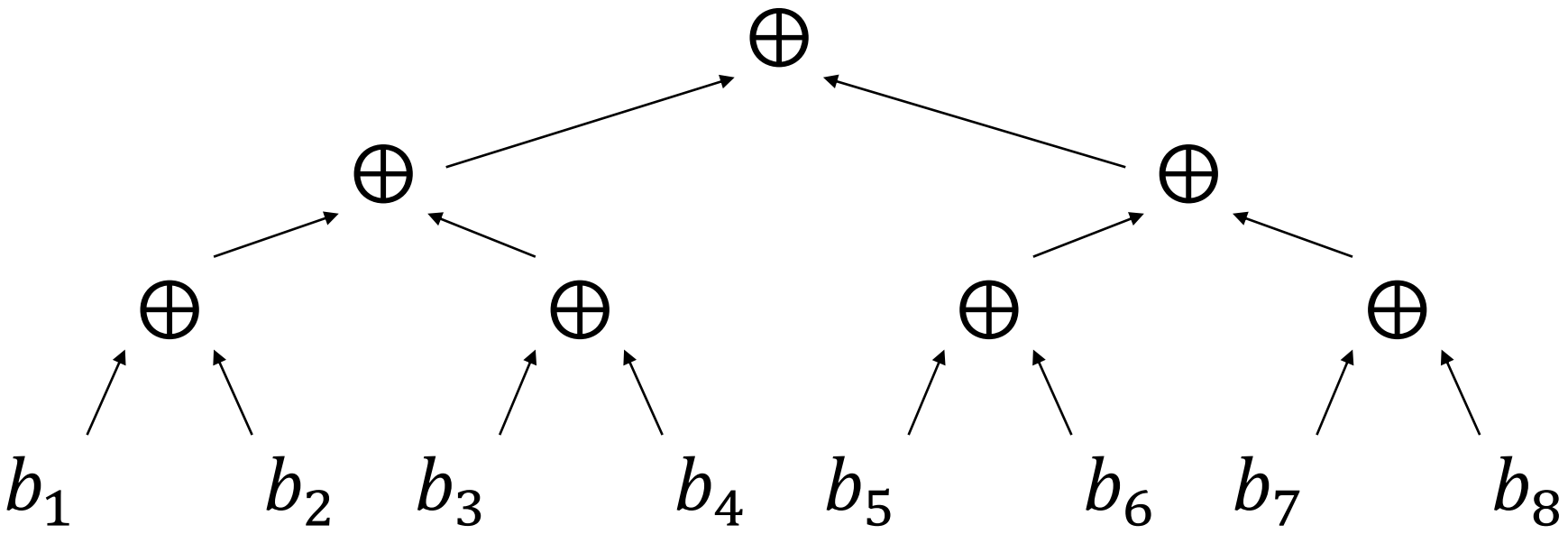
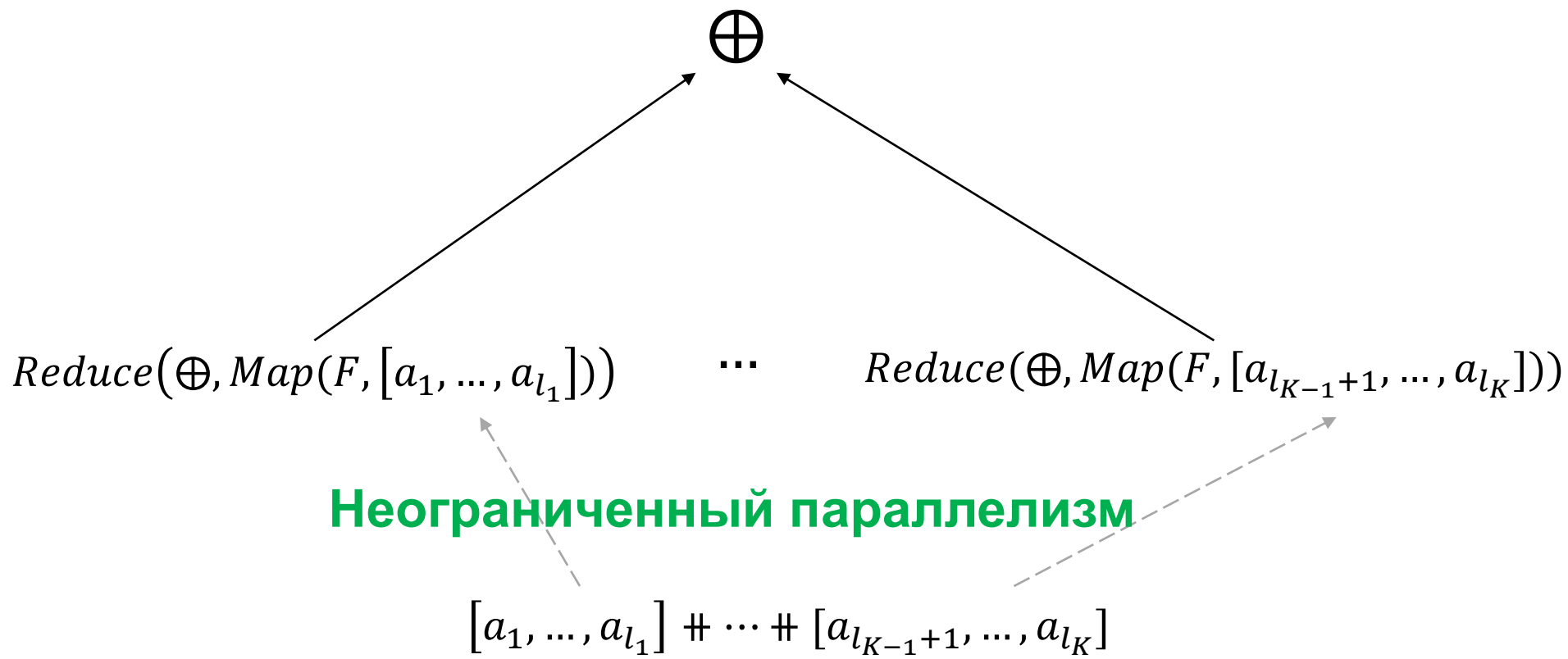


Схема распараллеливания *Map & Reduce*



Шаблон последовательного алгоритма в модели BSF

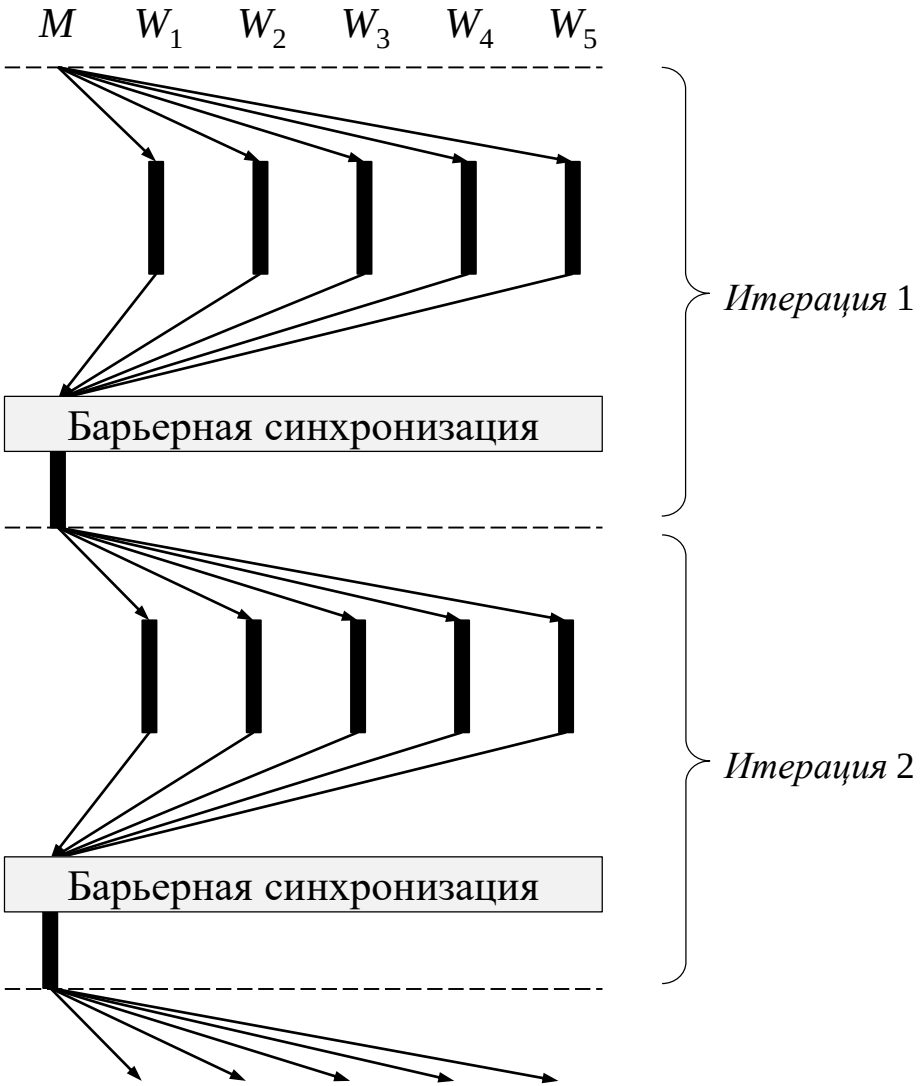
1. $i := 0; Input(A, x_0)$
2. $B := Map(F_{x_i}, A)$
3. $s := Reduce(\oplus, B)$
4. $x_{i+1} := Compute(x_i, s);\ i := i + 1$
5. **if** $StopCond(x_{i-1}, x_i)$ **go to** 7
6. **go to** 2
7. $Output(x_i)$; **stop**

i	- номер итерации
$A \in [\mathcal{A}]$	- список исходных элементов данных
x_0	- начальное приближение
$F_x: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	- параметризованная функция
$B \in [\mathcal{B}]$	- список результирующих элементов
$\oplus$	- ассоциативная операция
x_i	- *i*-тое приближение

Map & Reduce – не прокрустово ложе !

- **Операция объединения списков** $\doublebarwedge$
  - **ассоциативность**:
    $$([a_1, \dots, a_i] \doublebarwedge [b_1, \dots, b_j]) \doublebarwedge [c_1, \dots, c_l] = [a_1, \dots, a_i] \doublebarwedge ([b_1, \dots, b_j] \doublebarwedge [c_1, \dots, c_l])$$
- **Операция объединения мультимножеств** $\uplus$
  - **ассоциативность**:
    $$(\{a_1, \dots, a_i\} \uplus \{b_1, \dots, b_j\}) \uplus \{c_1, \dots, c_l\} = \{a_1, \dots, a_i\} \uplus (\{b_1, \dots, b_j\} \uplus \{c_1, \dots, c_l\})$$
  - **коммутативность**:
    $$\{a_1, \dots, a_i\} \uplus \{b_1, \dots, b_j\} = \{b_1, \dots, b_j\} \uplus \{a_1, \dots, a_i\}$$
- **Операция объединения множеств** $\cup$
  - **ассоциативность**:
    $$(\{a_1, \dots, a_i\} \cup \{b_1, \dots, b_j\}) \cup \{c_1, \dots, c_l\} = \{a_1, \dots, a_i\} \cup (\{b_1, \dots, b_j\} \cup \{c_1, \dots, c_l\})$$
  - **коммутативность**:
    $$\{a_1, \dots, a_i\} \cup \{b_1, \dots, b_j\} = \{b_1, \dots, b_j\} \cup \{a_1, \dots, a_i\}$$
  - **идемпотентность:**
    $$\{a_1, \dots, a_i\} \cup \{b_1, \dots, b_j\} \cup \{b_1, \dots, b_j\} = \{a_1, \dots, a_i\} \cup \{b_1, \dots, b_j\}$$

Синхронизация параллельной обработки и в модели *BSF*



Шаблон параллельного алгоритма в модели BSF

Шаг	Мастер	Рабочий j (j=1,…,K)
1.	$i := 0; Input(x_0)$	$Input(A^{[j]})$
2.	$SendToWorkers(x_i)$	$RecvFromMaster(x_i)$
		$B^{[j]} := Map(F_{x_i}, A^{[j]})$
3.		$s^{(j)} := Reduce(\oplus, B^{[j]})$
	$RecvFromWorkers([s^{(1)}, \dots, s^{(K)}])$	$SendToMaster(s^{(j)})$
	$s := Reduce(\oplus, [s^{(1)}, \dots, s^{(K)}])$	
4.	$x_{i+1} := Compute(x_i, s);\ i := i + 1$	
5.	**if** $StopCond(x_{i-1}, x_i)$ **go to** 7	
6.	**go to** 2	**go to** 2
7.	$Output(x_i)$; **stop**	

Стоимостная метрика модели BSF

K – количество рабочих

l – длина обрабатываемого списка

L – латентность (время посылки сообщения длиной в 1 байт)

t_s – время передачи сообщения от мастера рабочему (без учета латентности)

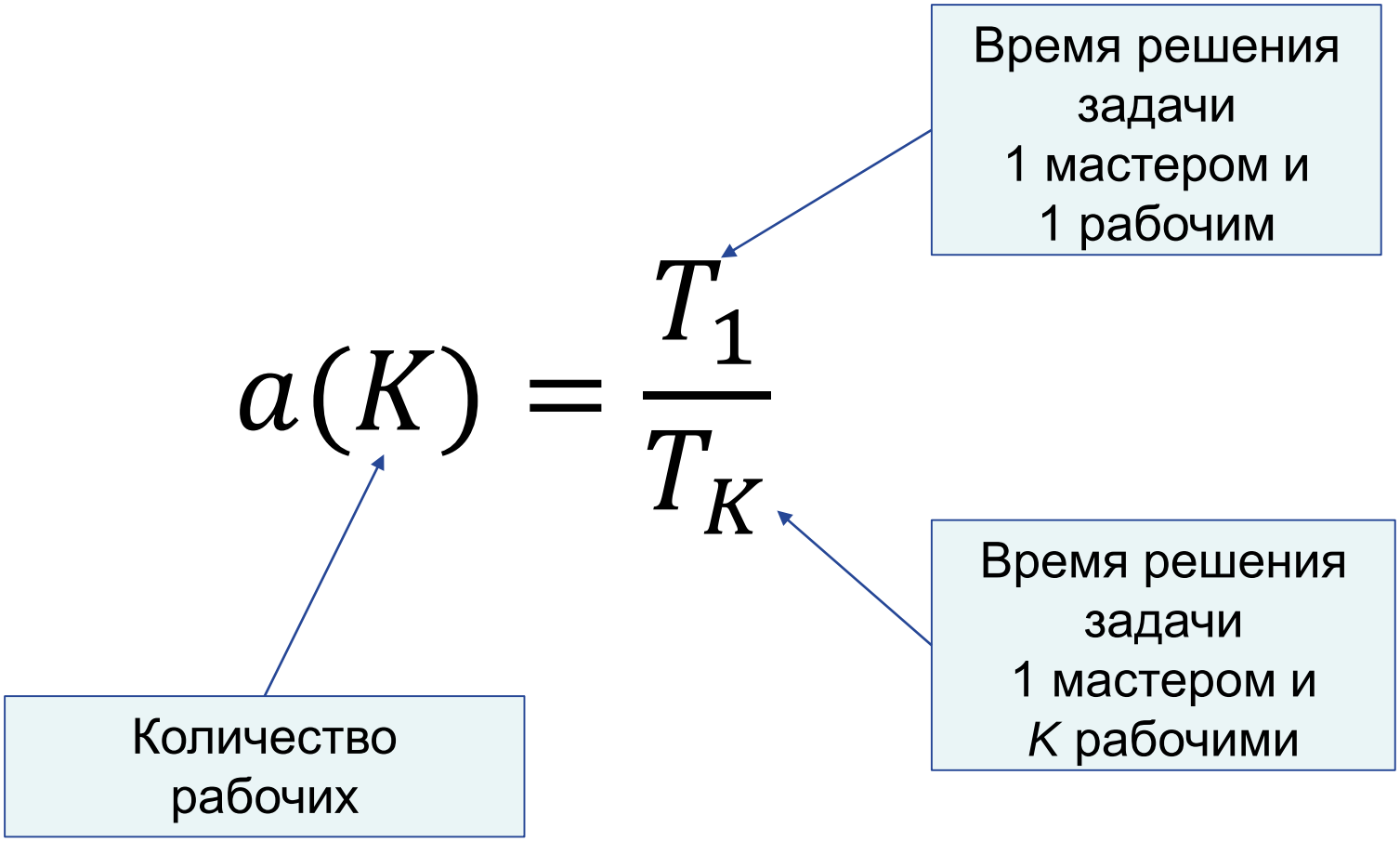
t_r – время передачи сообщения от рабочего мастеру (без учета латентности)

t_{Map} – время выполнения функции Map для всего списка исходных данных

t_{Reduce} – время выполнения операции $\oplus$

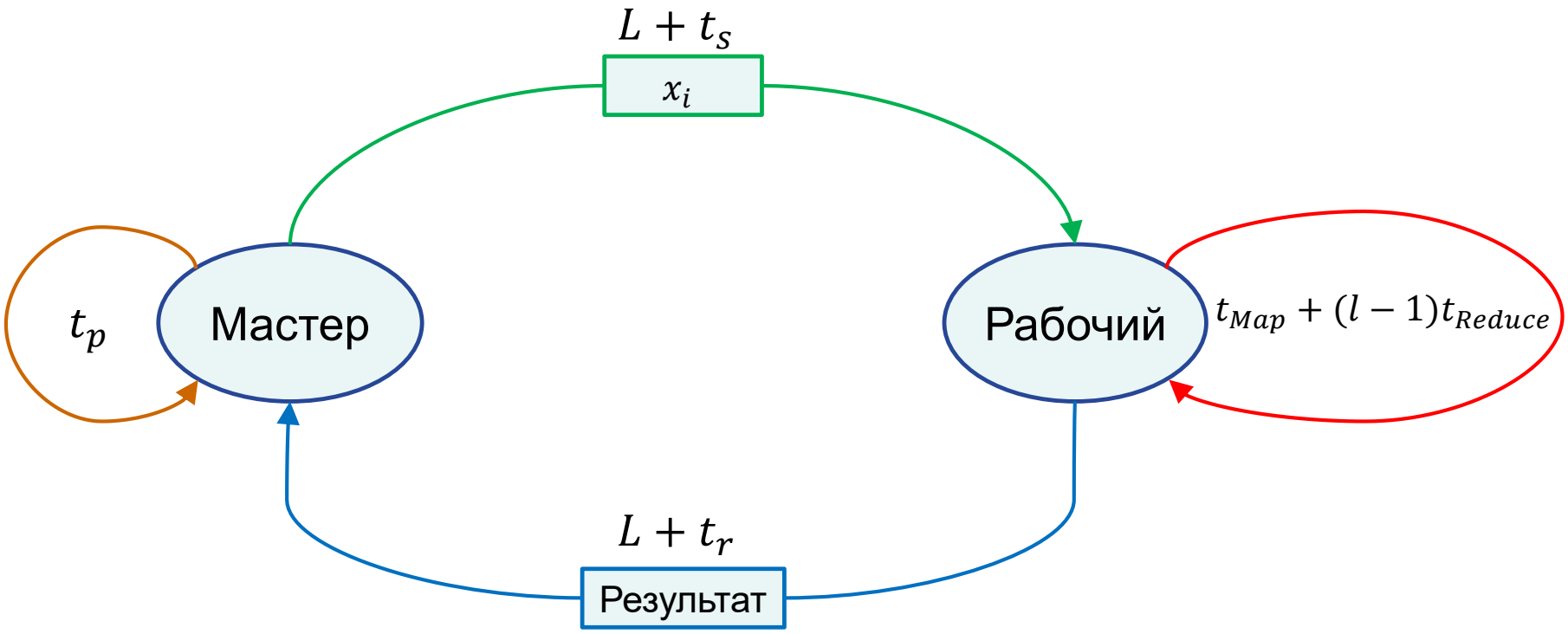
t_p – время на обработку результатов итерации

Ускорение в модели BSF



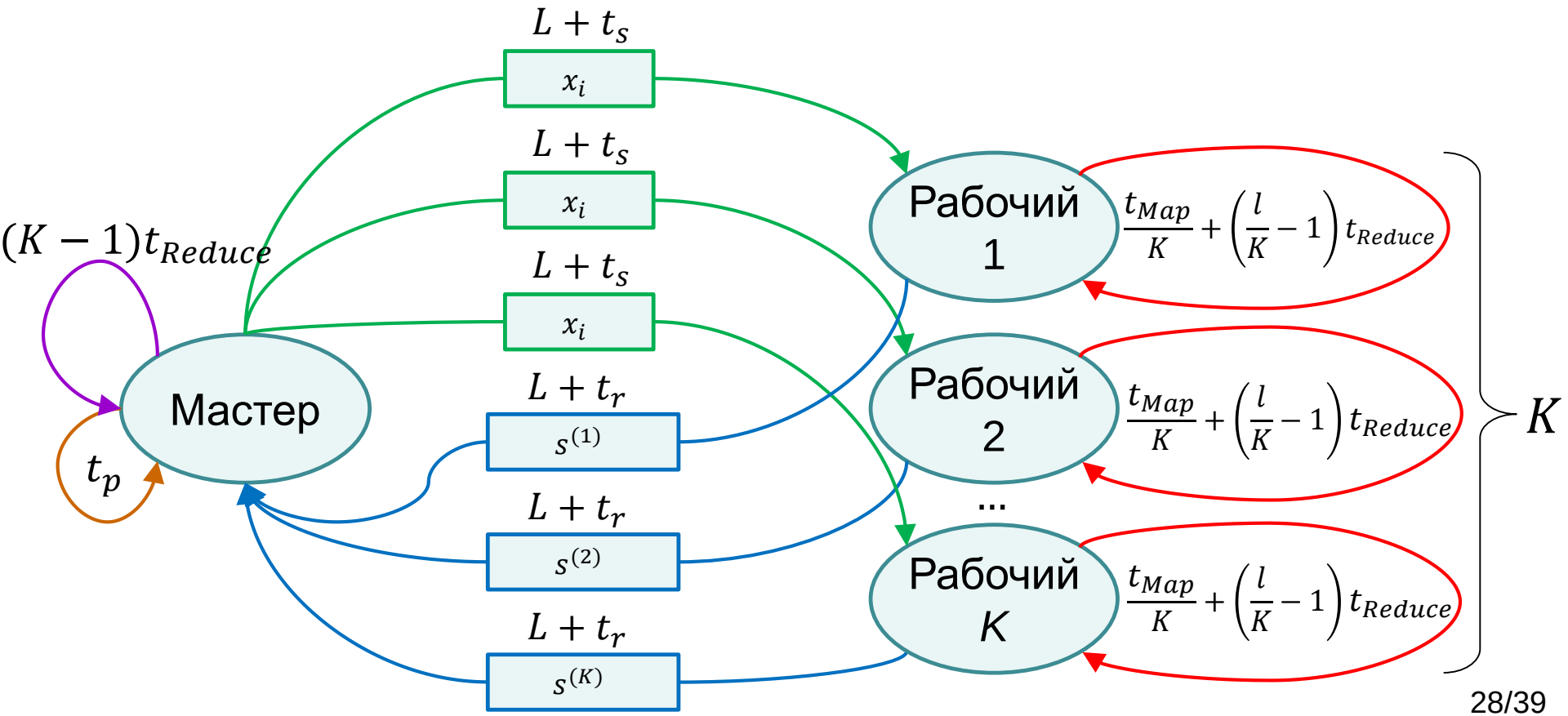
Оценка времени T_1

$$T_1 = L + t_s + t_{Map} + (l-1)t_{Reduce} + L + t_r + t_p$$



Оценка времени T_K

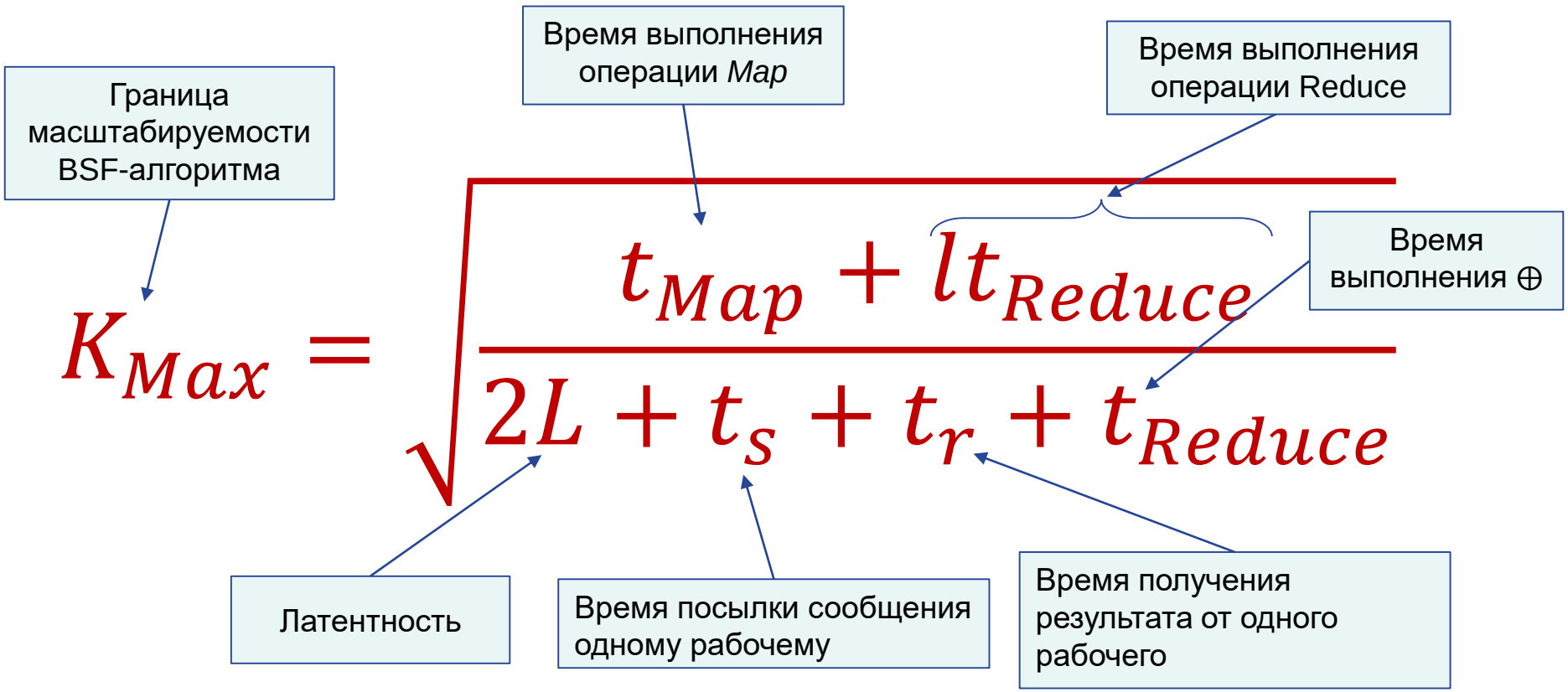
$$T_K = K(L + t_s) + \frac{t_{Map}}{K} + \left(\frac{l}{K} - 1\right) t_{Reduce} + K(L + t_r) + (K - 1)t_{Reduce} + t_p$$



Ускорение для модели BSF

$$a_{BSF}(K) = \frac{2L + t_s + t_r + t_p + t_{Map} + lt_{Reduce}}{K(2L + t_s + t_r + t_{Reduce}) + \frac{\left(t_{Map} + lt_{Reduce}\right)}{K} - t_{Reduce} + t_p}$$

Теорема о границе масштабируемости BSF-алгоритма



Алгоритм Jacobi для приближенного решения СЛАУ

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad b = (b_1, \dots, b_n)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, \forall j \neq i \\ 0, \forall j = i \end{cases}$$

$$d = (d_1, \dots, d_n) \qquad d_i = b_i / a_{ii}$$

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$$

Функция для *Map*

$$F_x(j) = \left(c_{1j}x_j, \ldots, c_{nj}x_j\right) = x_j \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}^T$$

j – номер столбца матрицы C

Алгоритм Jacobi над списками

1. $Input(C, d); k := 0; x^{(0)} := d$
2. $[g^1, \ldots, g^n] := Map\left(F_{x^{(k)}}, [1, \ldots, n]\right)$
3. $g := Reduce(+, [g^1, \ldots, g^n])$
4. $x^{(k+1)} := g + d; k := k + 1$
5. **if** $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|^2 < \varepsilon$ **go to** 7
6. **go to** 2
7. $Output\left(x^{(k)}\right)$; **stop**

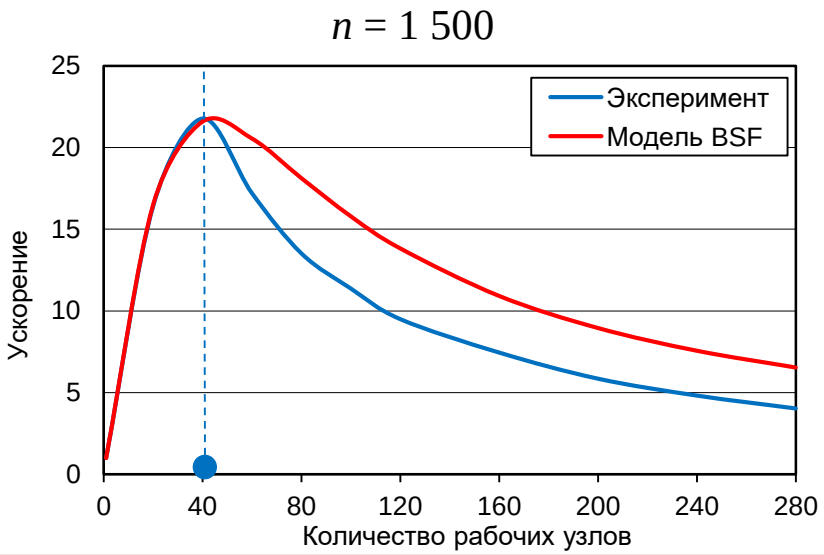
BSF-оценки для алгоритма Jacobi

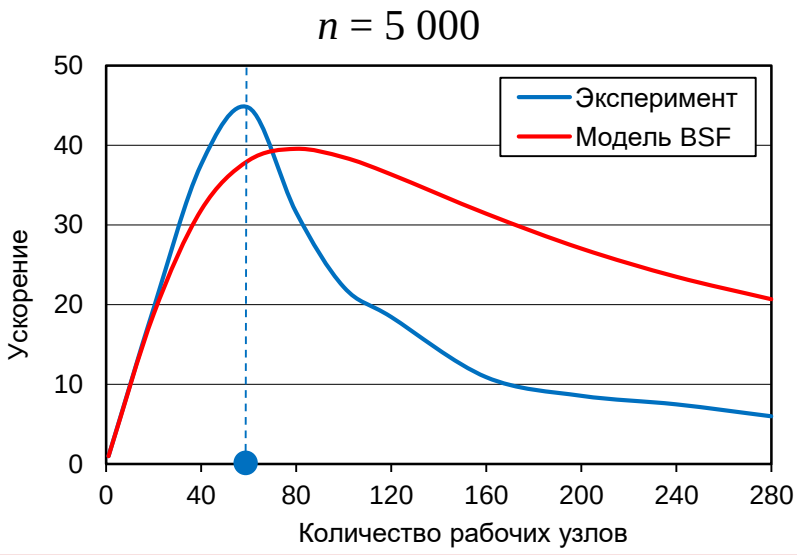
τ_{op} - время выполнения одной операции с плавающей точкой
τ_{tr} - время пересылки вещественного числа (без учета латентности)
n - количество уравнений
L - латентность

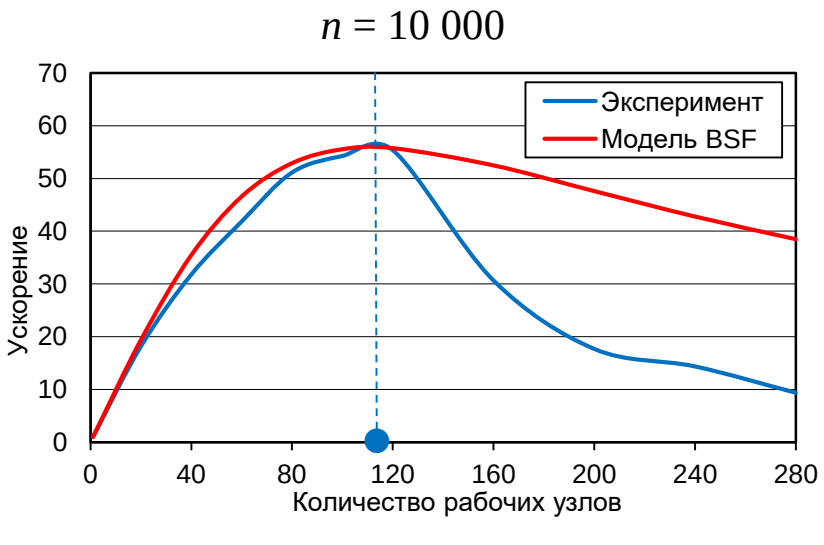
$$\Rightarrow a_{Jacobi}(K) = \frac{2(L + \tau_{tr} n) + \tau_{op} n(3n - K + 5)}{K^2\left(2\left(L + \tau_{op} n\right) + 3\tau_{op} n(n + K)\right)}$$

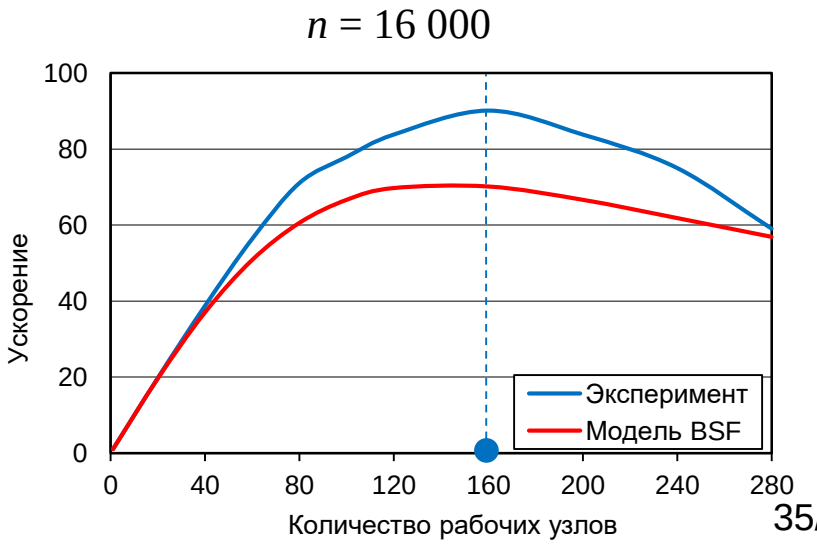
$$\Rightarrow \boldsymbol{K^{Max}_{Jacobi} = O\left(\sqrt{n}\right)}$$

Ускорение алгоритма Jacobi-MR: теория и практика









Другие верификации модели BSF

- *Sokolinskaya I., Sokolinsky L.B.* Scalability Evaluation of NSLP Algorithm for Solving Non-Stationary Linear Programming Problems on Cluster Computing Systems // Supercomputing. RuSCDays 2017. Communications in Computer and Information Science. 2017. Vol. 793. P. 40-53. DOI: 10.1007/978-3-319-71255-0_4
- *Sokolinskaya I.M., Sokolinsky L.B.* Scalability Evaluation of Cimmino Algorithm for Solving Linear Inequality Systems on Multiprocessors with Distributed Memory // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2018. Vol. 5, No. 2. P. 11-22. DOI: 10.14529/jsfi180202
- Ежова Н.А., Соколинский Л.Б. Верификация модели параллельных вычислений BSF-MR на примере гравитационной задачи // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2019). Короткие статьи и описания плакатов XIII Международной научной конференции. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2019. С. 239-250. URL: http://omega.sp.susu.ru/pavt2019/short/007.pdf

Параллельный BSF-каркас

- C++
- MPI + OpenMP
- Инкрементная компиляция
- Исходные коды
  https://github.com/leonid-sokolinsky/BSF-skeleton

BSF-Studio (в разработке)

- Облачный конструктор для быстрой разработки BSF-программ на языке C++ с использованием библиотек MPI и OpenMP
- Базируется на BSF-каркасе

Разработчик:
Надежда Ежова
(аспирант)

Спасибо за внимание!

Вопросы?