

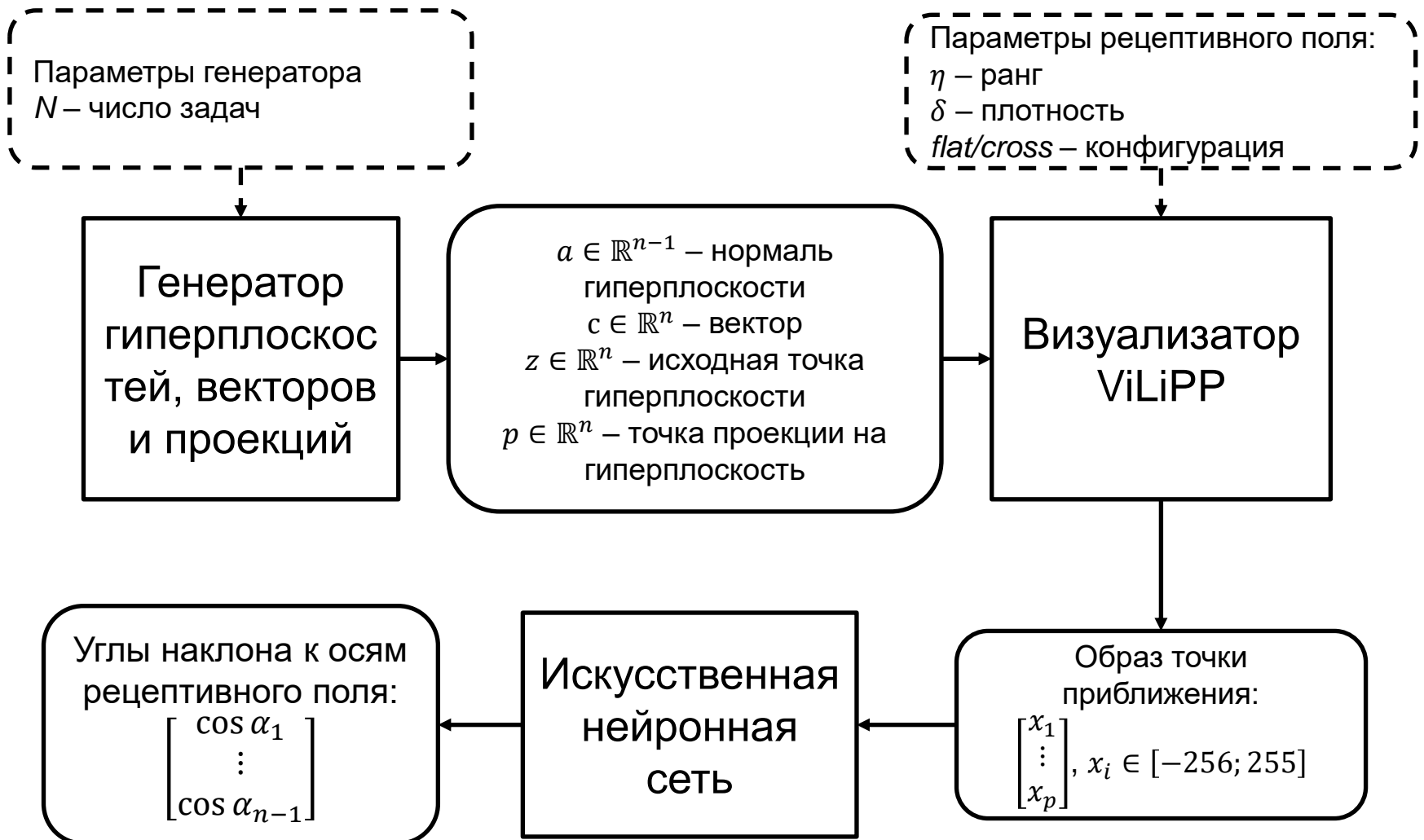


Построение проекции вектора на гиперплоскость в многомерном пространстве путем взаимодействия суперкомпьютера и искусственной нейронной сети

Н.А. Ольховский

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

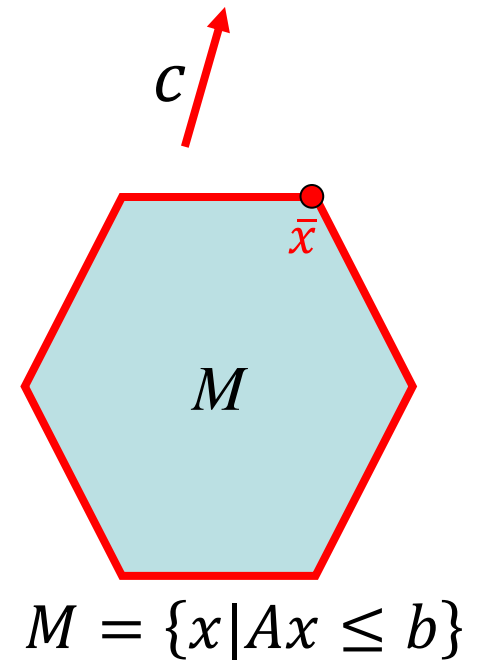
Архитектура программного комплекса



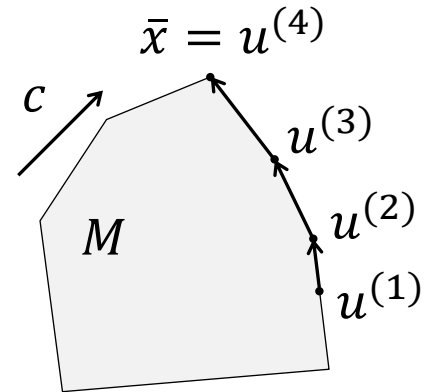
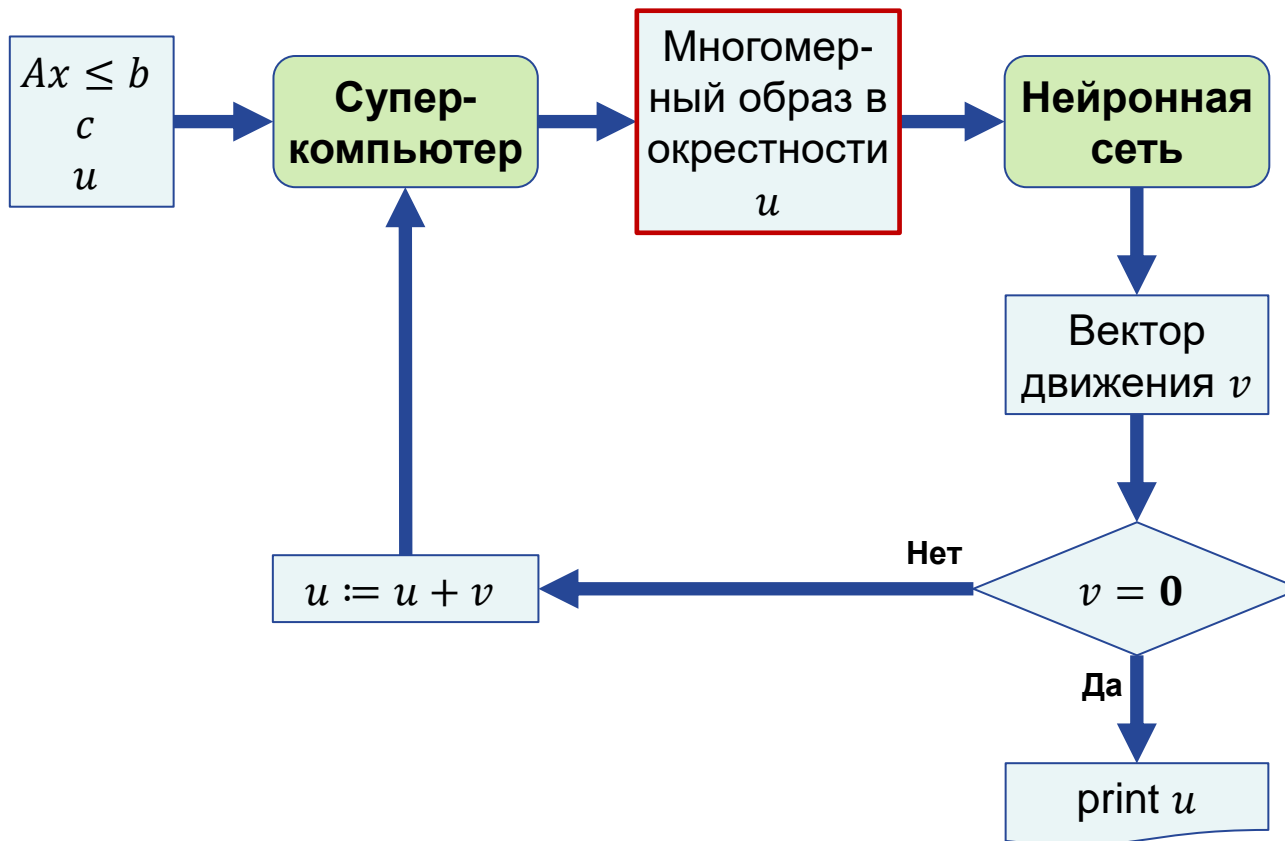
Задача линейного программирования

$$\bar{x} = \arg \max \{ \langle c, x \rangle \mid Ax \leq b \}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$
- A – матрица $m \times n$
- b – вектор размерности m
- c – вектор размерности n
- $\langle c, x \rangle$ – скалярное произведение



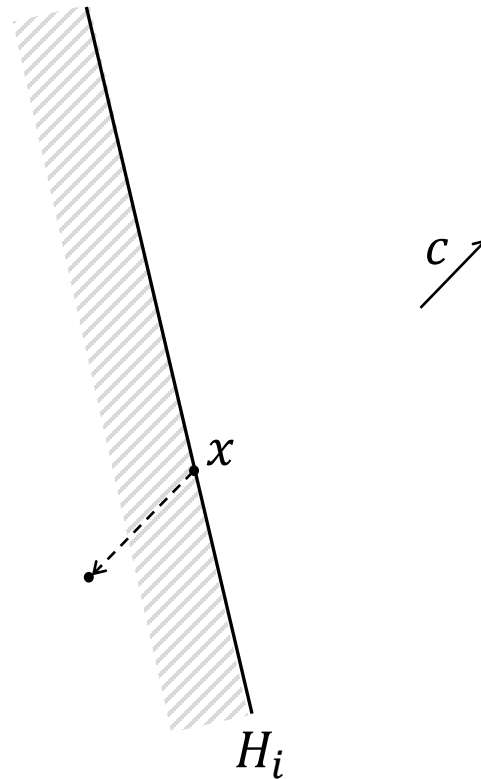
Идея предлагаемого подхода



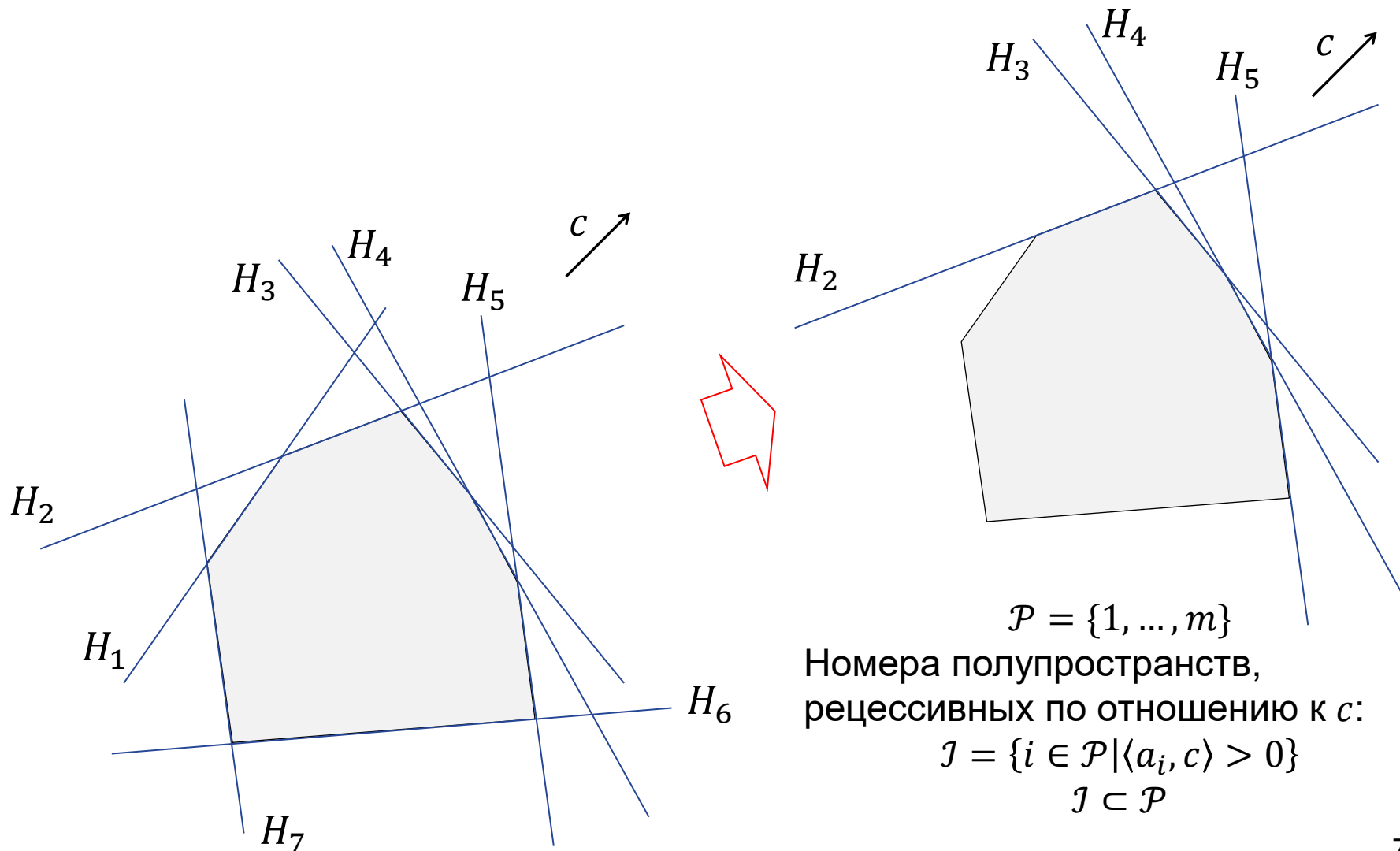
Рецессивное полупространство

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i\}$$

$$\langle a_i, c \rangle > 0$$

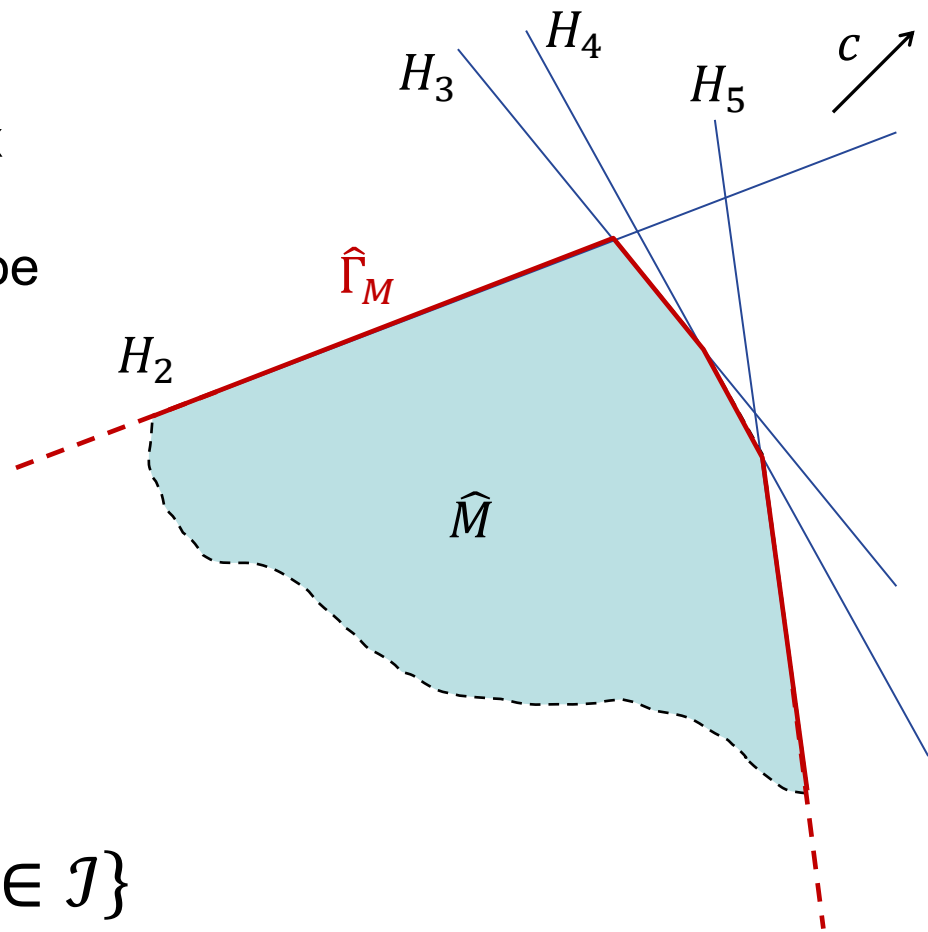


Переход к рецессивному многограннику



Рецессивный многогранник

- Многогранник, образуемый пересечением c -рецессивных полупространств
- Представляет собой замкнутое неограниченное множество



$$\hat{M} = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \hat{H}_i$$

$$\hat{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i \in \mathcal{J}\}$$

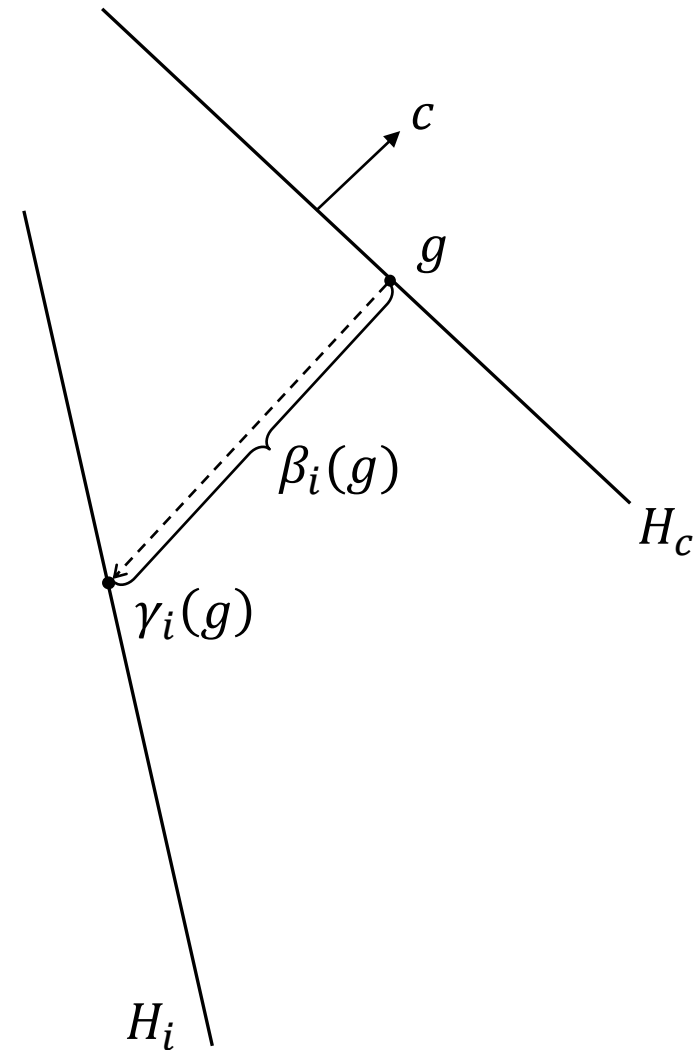
$$\hat{\Gamma}_M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0: S_\varepsilon(x) \cap \hat{M} \neq \emptyset \wedge S_\varepsilon(x) \cap \hat{M}^c \neq \emptyset\}$$

Смещение

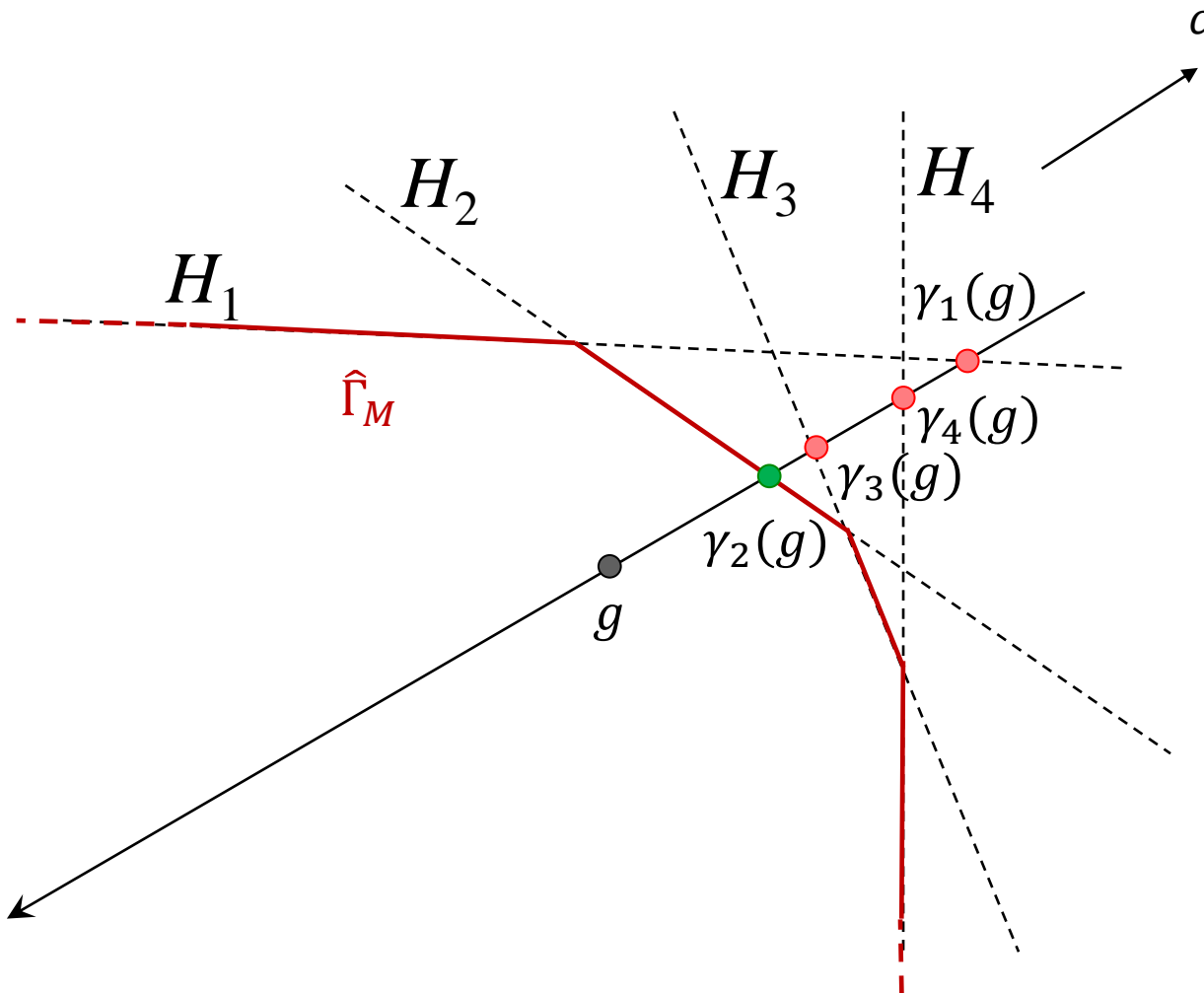
Целевая проекция: $\gamma_i(g) = g - \beta_i(g) \frac{c}{\|c\|}$

Ортогональная проекция: $\pi_c(\gamma_i(g)) = g$

$$\beta_i(g) = \frac{\langle a_i, g \rangle - b_i}{\langle a_i, c \rangle} \|c\|$$



Целевая проекция на границу рецессивного многогранника



$$\hat{\beta}(g) = \max_{i \in J} \beta_i(g)$$

$$\hat{\gamma}(g) = g - \hat{\beta}(g) \frac{c}{\|c\|}$$

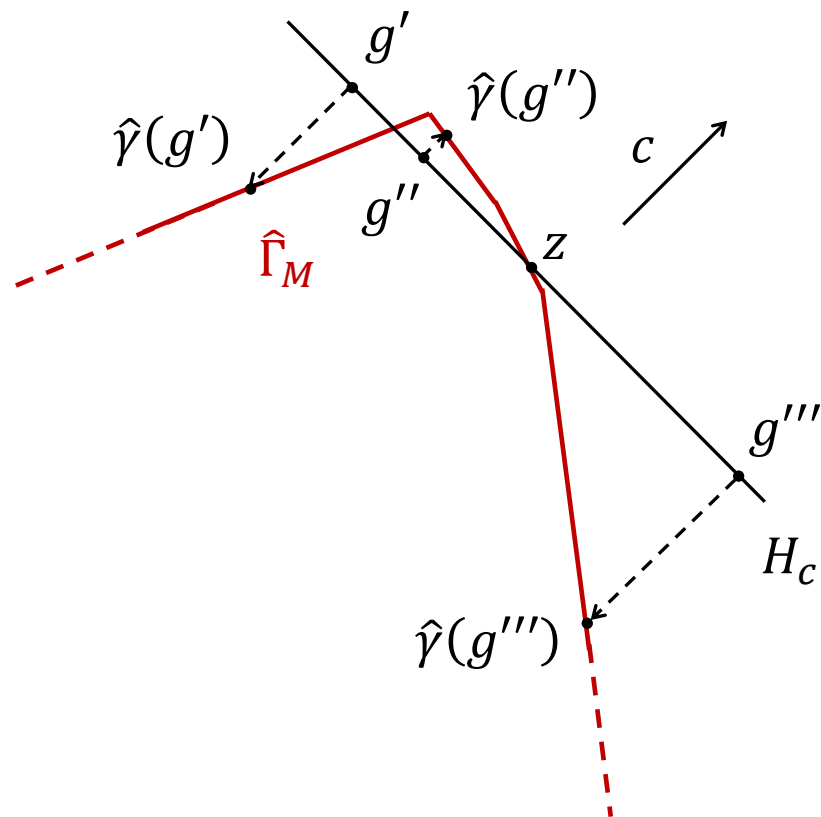
$$\hat{\gamma}(g) = \gamma_2(g)$$

$$\hat{\beta}(g) = \beta_2(g)$$

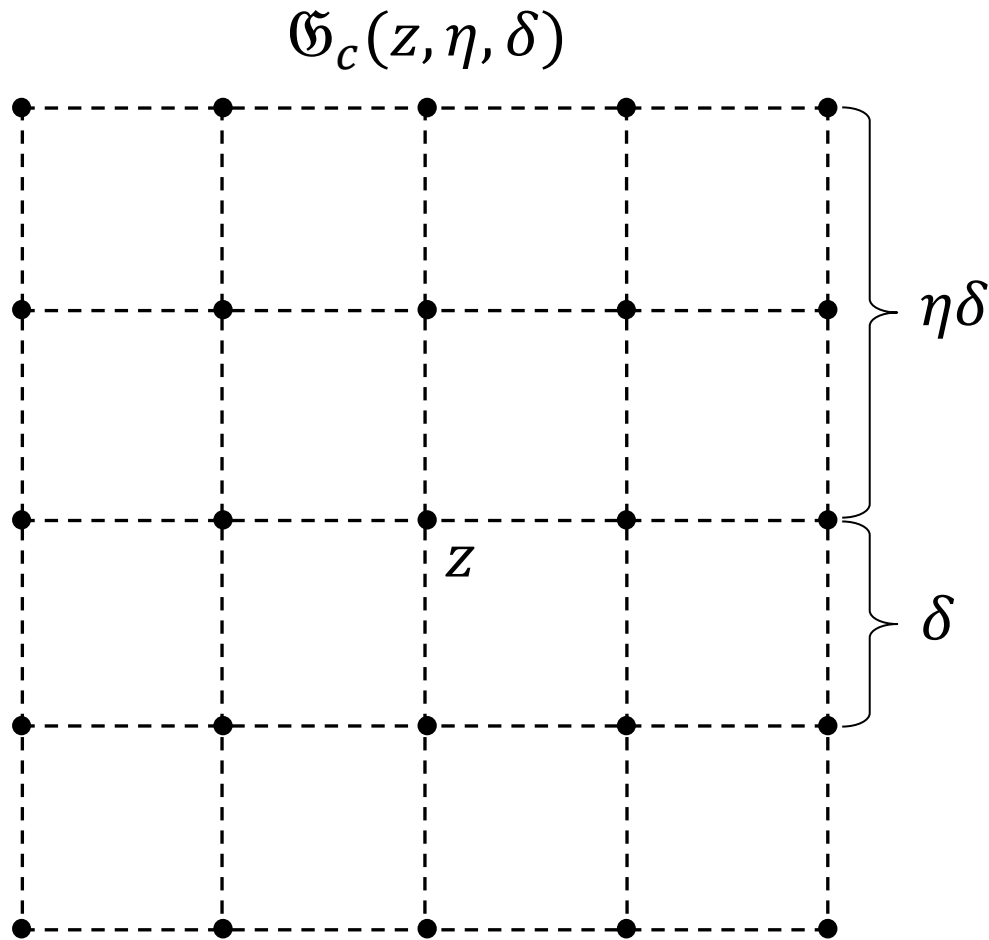
Построение рецептивного поля

Рецептивная гиперплоскость: $H_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, x - z \rangle = 0\}$

Целевая проекция: $\hat{\gamma} : H_c \rightarrow \hat{\Gamma}_M$



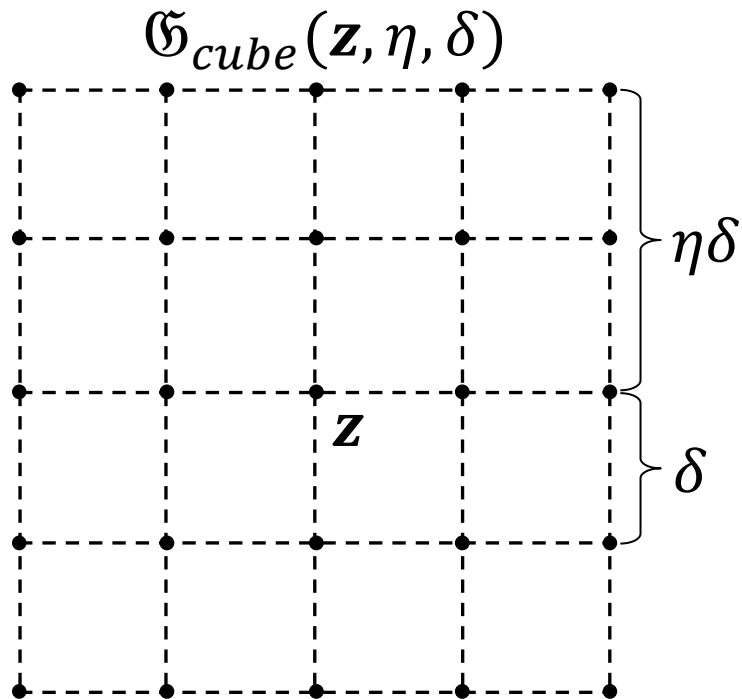
Рецептивное поле (flat)



η – ранг
 δ – шаг

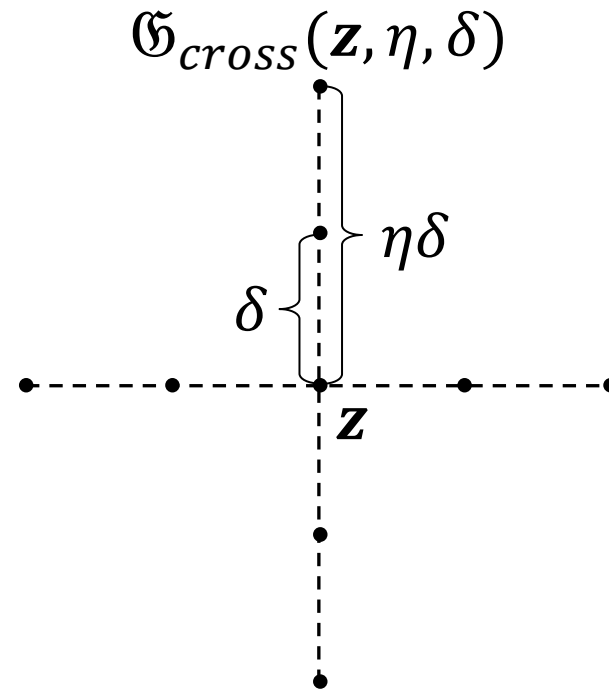
Receptive configurations

flat



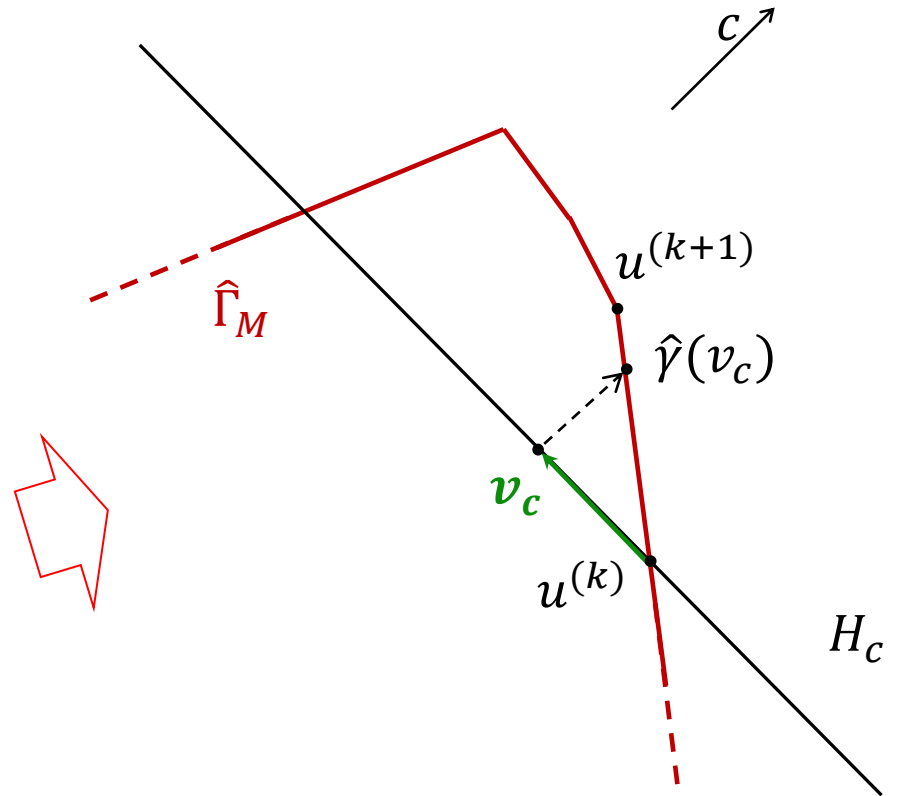
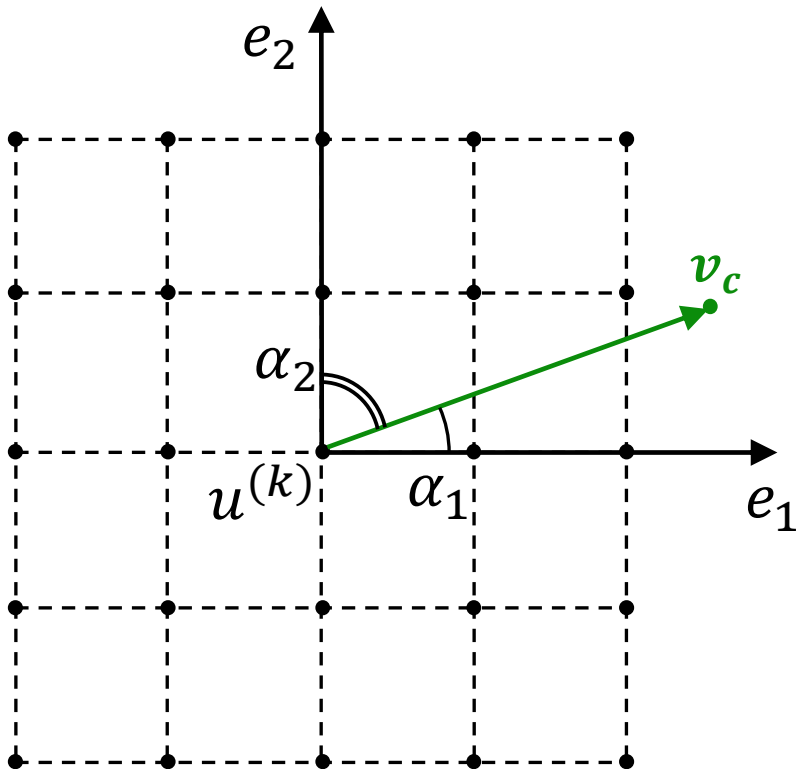
η – rank

cross

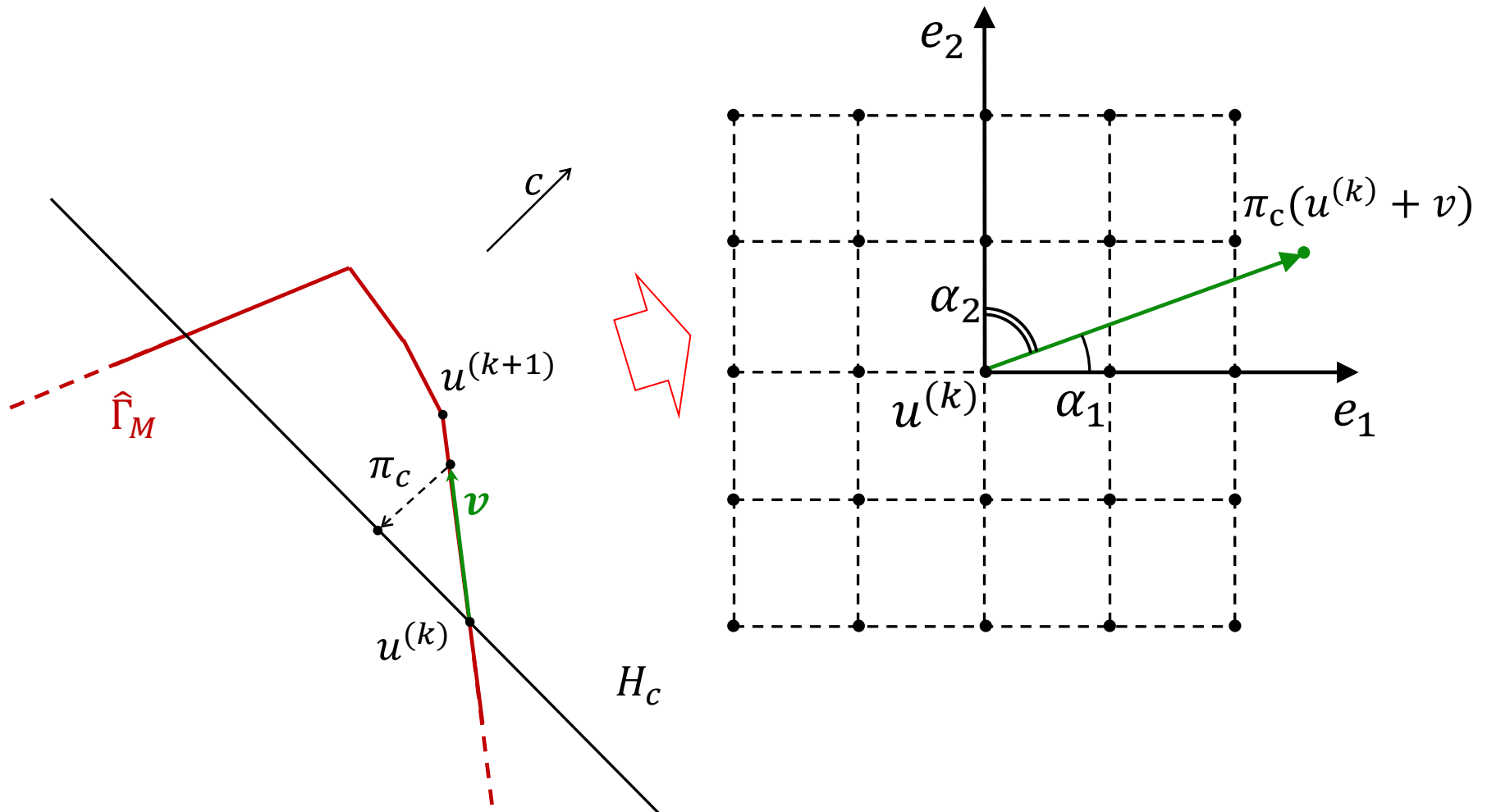


δ – density

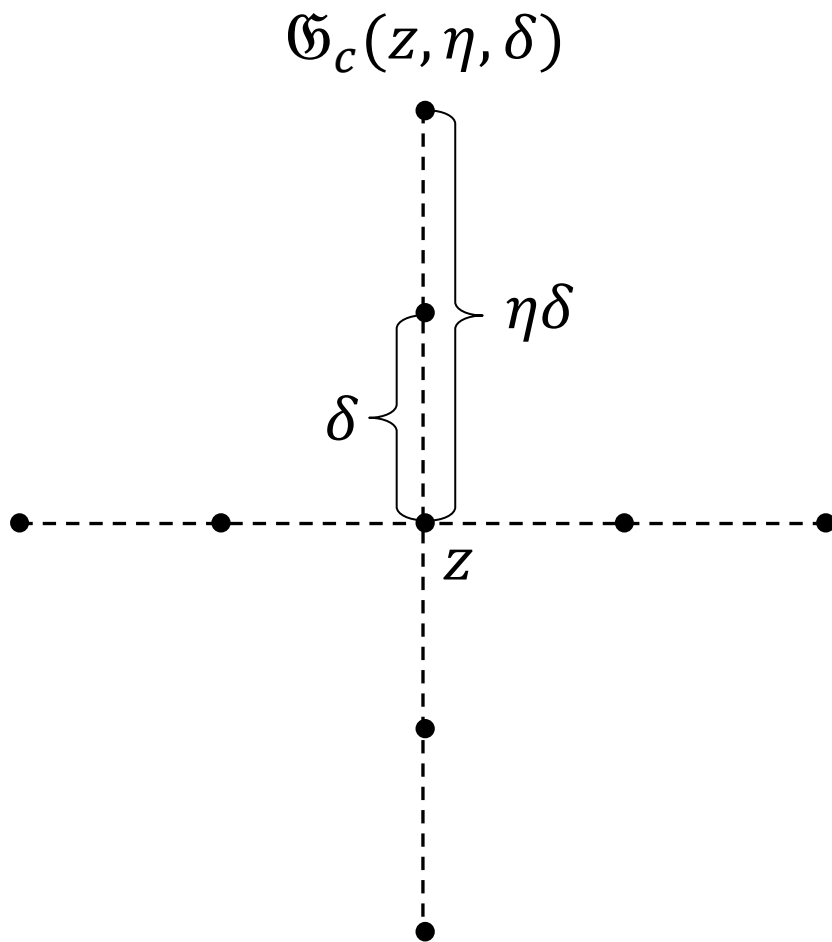
Вектор движения



Создание обучающего прецедента



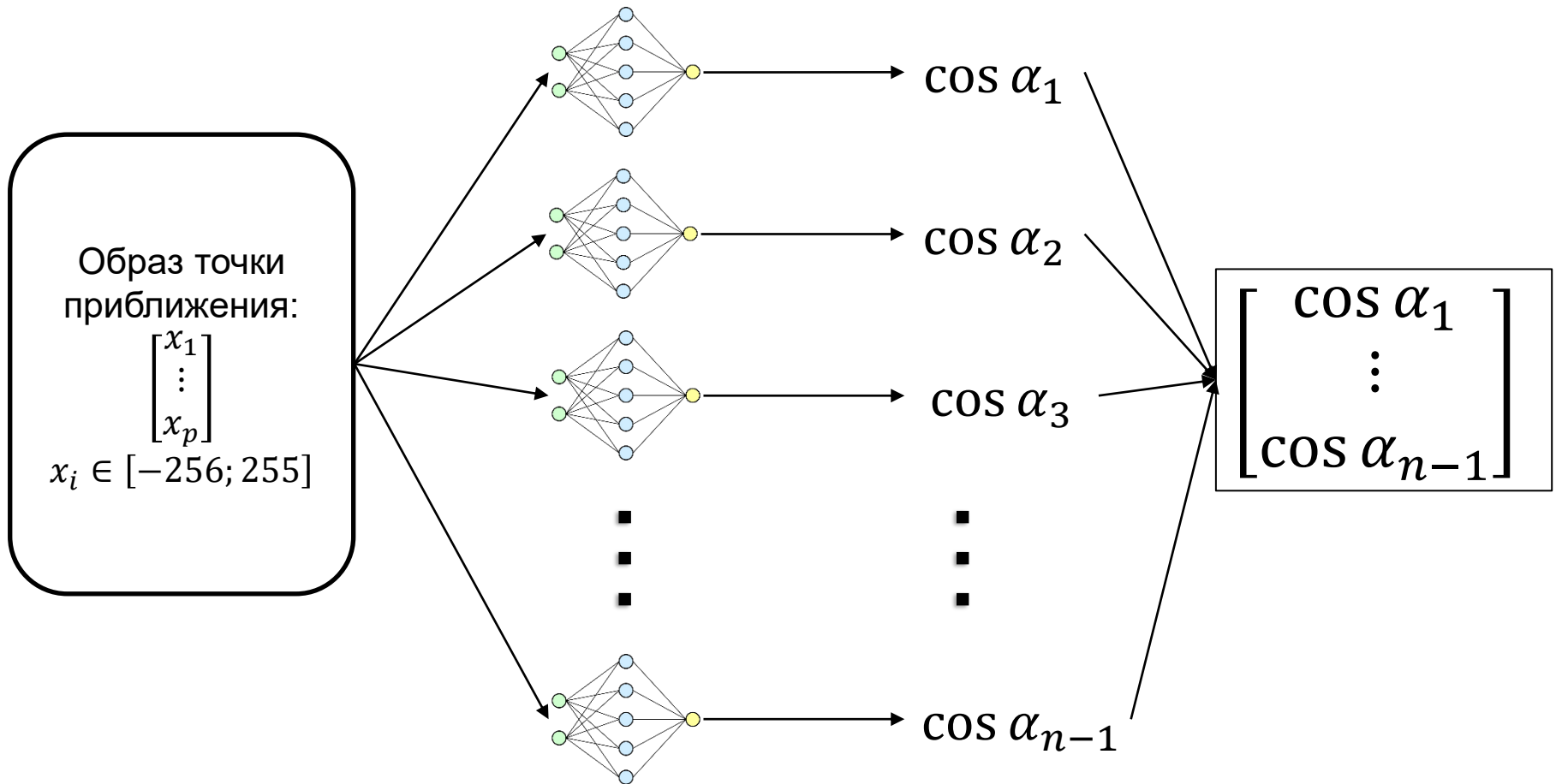
Рецептивное поле (cross)



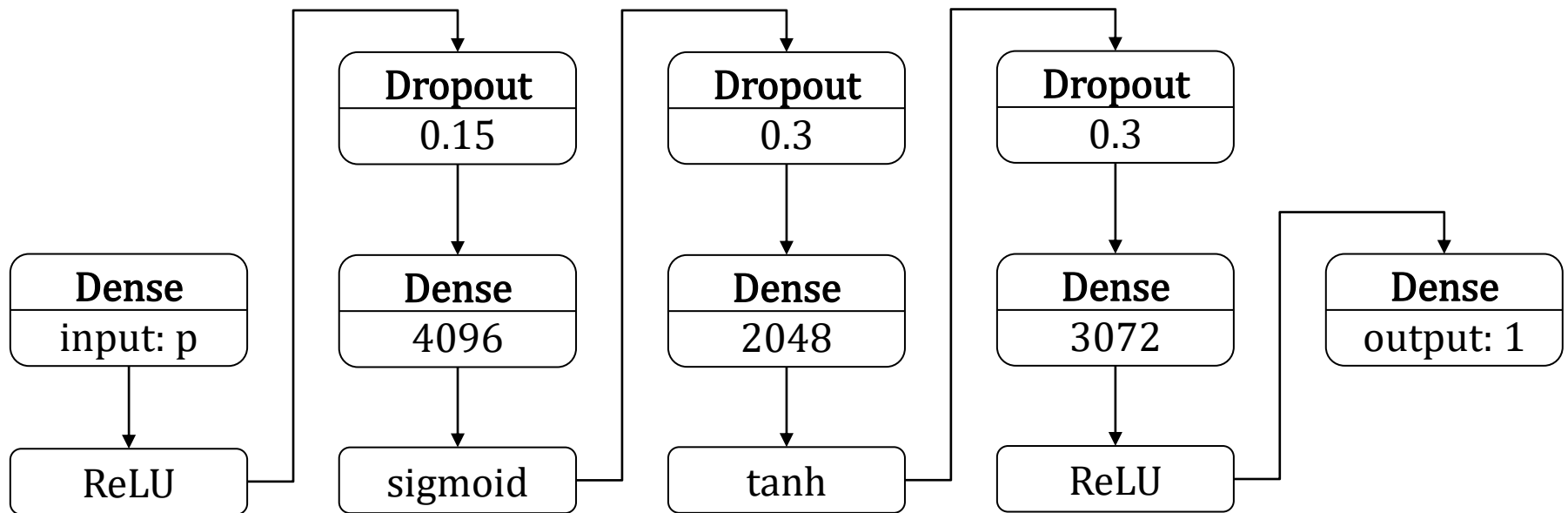
η – ранг

δ – ПЛОТНОСТЬ

Архитектура нейронной сети



Архитектура нейронной сети



Для **cross**: $p = 2\eta(n - 1) + 1$

Для **flat**: $p = (2\eta + 1)^{n-1}$

Эксперименты

Параметры

Число случайных задач ЛП

50 000 (для \mathbb{R}^3); 20 000 (для \mathbb{R}^4);

Число случайных ограничений

7 (для \mathbb{R}^3); 8 (для \mathbb{R}^4);

Конфигурации рецептивного поля

Ранг (η)	Плотность (δ)	Количество точек рецептивного поля			
		K_{flat}^2	K_{cross}^2	K_{flat}^3	K_{cross}^3
5	1.00	121	21	1331	31
4	1.25	81	17	729	25
3	1.66667	49	13	343	19
2	2.5	25	9	125	13
1	5	9	5	27	7

Метрики

Mean Absolute Error (MAE)

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum |y_{\text{true}} - y_{\text{pred}}|$$

Cosine Similarity (CS)

$$\text{CS} = \frac{\sum (y_{\text{true}} \cdot y_{\text{pred}})}{\sqrt{\sum y_{\text{true}}^2} \cdot \sqrt{\sum y_{\text{pred}}^2}} \cdot 100$$

y_{true} – ИСТИННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

y_{pred} – ОТВЕТ ИНС

n – размер выборки (batch size)

Достигнутая точность

Для \mathbb{R}^3 :

flat

CS = 97,4%

MAE = 0,0311

cross

CS = 96,2%

MAE = 0,0369

Для \mathbb{R}^4 :

flat

CS = 95,2%

MAE = 0,0437

cross

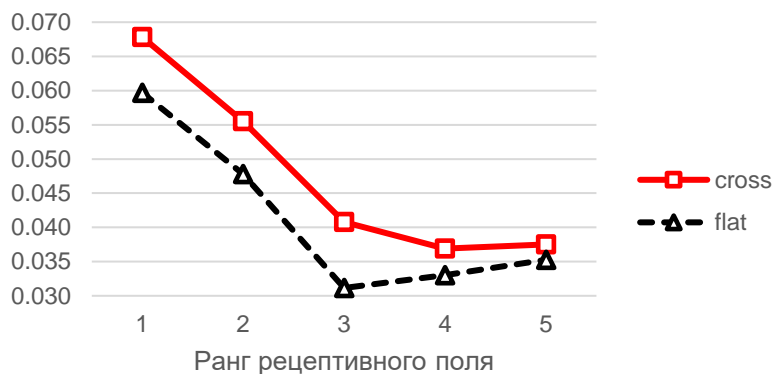
CS = 95,9%

MAE = 0,0499

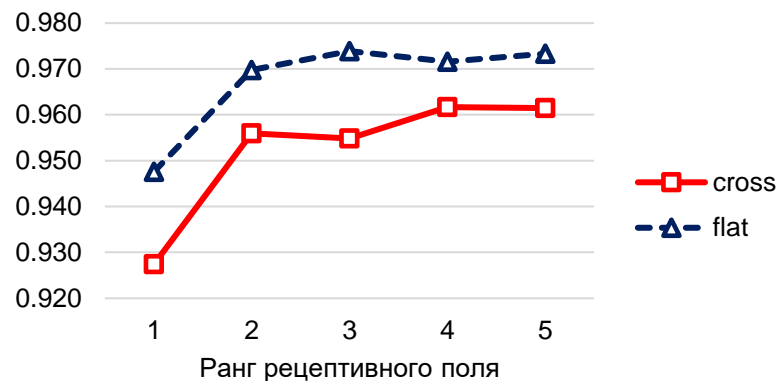
Зависимость точности от η

\mathbb{R}^3

MAE

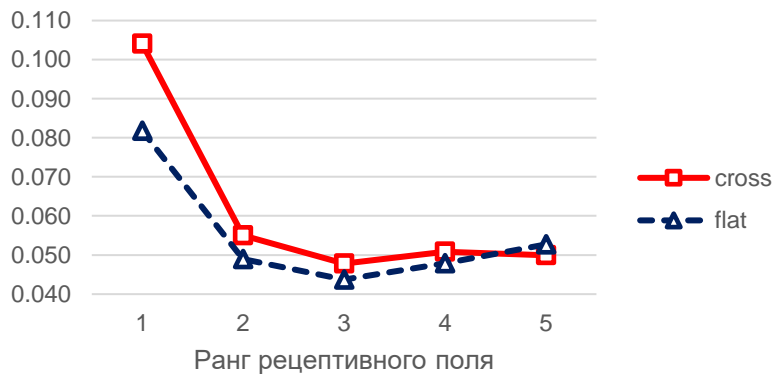


Cosine Similarity

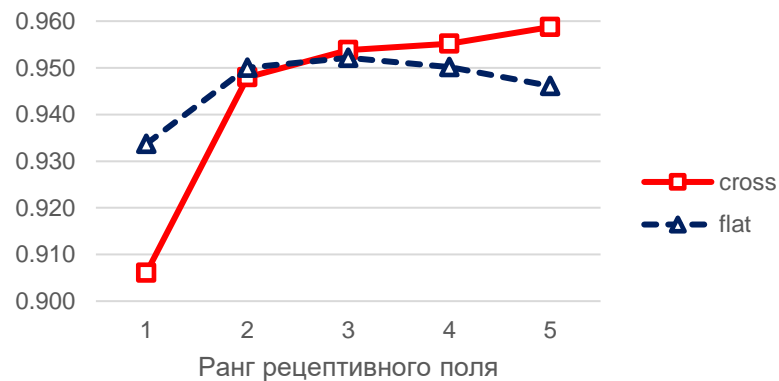


\mathbb{R}^4

MAE



Cosine Similarity



Спасибо за внимание!