Глубокие нейронные сети

Выходной слой softmax

Лекция 7

На выходе нейронной сети выдается распределение вероятностей

$$0 \leq y_j \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Пример работы нейронной сети с распределением вероятностей

Использование функции *softmax* в качестве функции активации выходного слоя

Для выходного слоя L применяется особая функция активации *softmax*:

$$a_j^{(L)} = \frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}}$$

n – количество нейронов в выходном слое L

Свойства функции *softmax*

$$1)\ 0 < \frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}} < 1 \Rightarrow 0 < a_j^{(L)} < 1$$

$$2) \sum_{j=1}^{n} a_j^{(L)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}} = 1$$

n – количество нейронов в выходном слое L

Выходной слой softmax задает распределение вероятностей

- Сумма всех выходных сигналов равна 1
- Выходной сигнал $a_j^{(L)}$ j-того нейрона интерпретируется как вероятность того, что правильный ответ есть j
- Например, в задаче распознавания рукописных цифр значение $a_4^{(L)}$ интерпретируется как вероятность того, что на вход сети подана цифра 4

Использование в качестве функции потерь модифицированной функции перекрестной энтропии

$$\boxed{C = -\sum_j y_j \ln a_j^{(L)}}$$

Свойства функции потерь:

1) $C \geq 0$

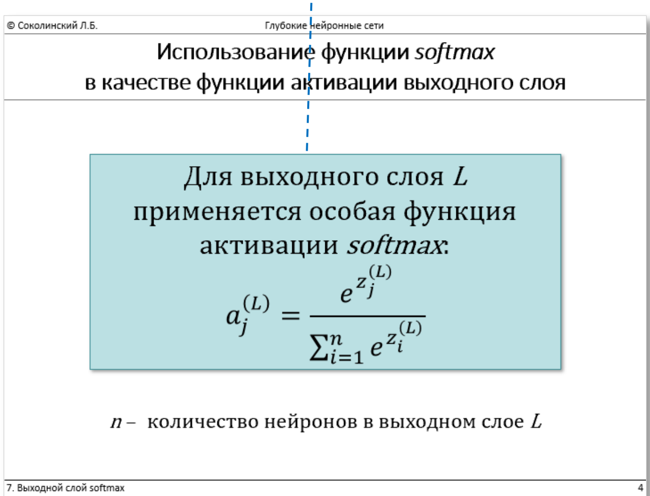
2) Минимум C достигается при $\boldsymbol{a}^{(L)} = \boldsymbol{y}$:

$$\min_{\boldsymbol{a}^{(L)}} C = -\sum_j y_j \ln y_j$$

Доказательство $C \geq 0$

$$
\left.
\begin{array}{l}
y_j \geq 0 \\
0 < a_j^{(L)} < 1 \Rightarrow \ln a_j^{(L)} < 0
\end{array}
\right\} \Rightarrow -y_j \ln a_j^{(L)} \geq 0 \Rightarrow
$$

$$
C = -\sum_j y_j \ln a_j^{(L)} \geq 0
$$


© Соколинский Л.Б. Глубокие нейронные сети

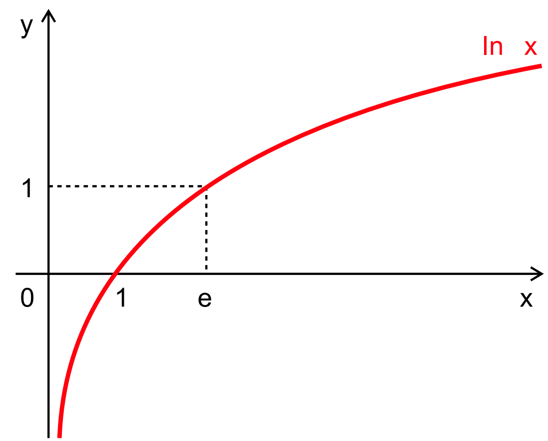
Использование функции *softmax* в качестве функции активации выходного слоя

Для выходного слоя L применяется особая функция активации *softmax*:

$$a_j^{(L)} = \frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}}$$

n – количество нейронов в выходном слое L

7. Выходной слой softmax 4

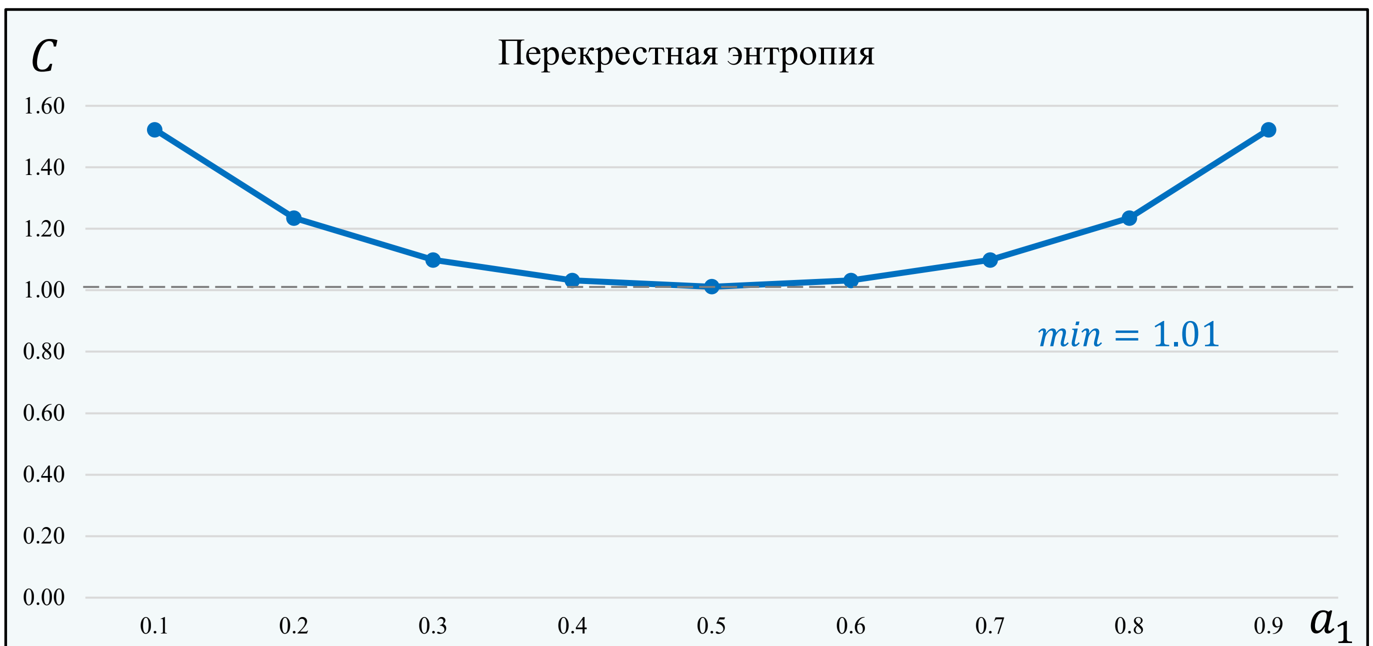


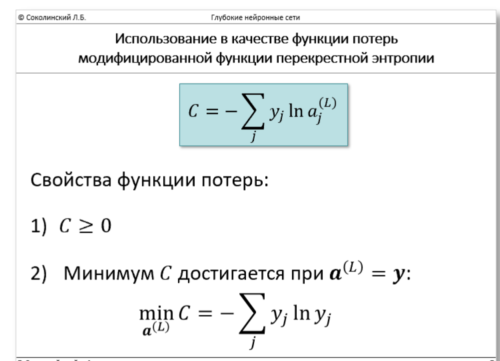
Минимум C достигается при $\boldsymbol{a}^{(L)} = \boldsymbol{y}$

$$a^{(L)} = (a_1, a_2, a_3); \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

$y_1 \in [0,1]$	0.5
$y_2 = \frac{2}{3}(1 - y_1)$	0.33
$y_3 = \frac{1}{3}(1 - y_1)$	0.17
Сумма	1

a_1	$a_2 = \frac{2}{3}(1 - a_1)$	$a_3 = \frac{1}{3}(1 - a_1)$	$C = -(y_1 \ln(a_1) + y_2 \ln(a_2) + y_3 \ln(a_3))$
0.1	0.60	0.30	1.52
0.2	0.53	0.27	1.23
0.3	0.47	0.23	1.10
0.4	0.40	0.20	1.03
0.5	0.33	0.17	1.01
0.6	0.27	0.13	1.03
0.7	0.20	0.10	1.10
0.8	0.13	0.07	1.23
0.9	0.07	0.03	1.52





© Соколинский Л.Б. Глубокие нейронные сети

Использование в качестве функции потерь модифицированной функции перекрестной энтропии

$$C = -\sum_j y_j \ln a_j^{(L)}$$

Свойства функции потерь:

1) $C \geq 0$

2) Минимум C достигается при $\boldsymbol{a}^{(L)} = \boldsymbol{y}$:

$$\min_{\boldsymbol{a}^{(L)}} C = -\sum_j y_j \ln y_j$$

7. Выходной слой softmax 7

Доказательство
Минимум C достигается при $\boldsymbol{a}^{(L)} = \boldsymbol{y}$

$$C = -\left(y_1 \ln(a_1) + \tfrac{2}{3}(1 - y_1)\ln\left(\tfrac{2}{3}(1 - a_1)\right) + \tfrac{1}{3}(1 - y_1)\ln\left(\tfrac{1}{3}(1 - a_1)\right)\right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial a_1} = \frac{a_1 - y_1}{(1 - a_1)a_1}$$

$$\text{Экстремум } \Leftrightarrow \frac{a_1 - y_1}{(1 - a_1)a_1} = 0 \Leftrightarrow a_1 = y_1$$

$$\frac{\partial C}{\partial a_1} > 0 \text{ при } a_1 > y_1 \text{ и } \frac{\partial C}{\partial a_1} < 0 \text{ при } a_1 < y_1 \Leftrightarrow \text{минимум}$$

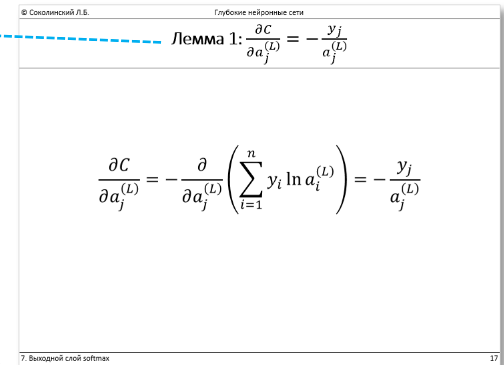
Вычисление ошибки δ_i^L для выходного слоя

$$\delta_i^{(L)} = \frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial C}{\partial a_j^{(L)}} \cdot \frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_i^{(L)}} = \sum_{j=1}^{n} -\frac{y_j}{a_j^L} \cdot \frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_i^{(L)}} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{a_j^{(L)}} \cdot \frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -\frac{y_i}{a_i^{(L)}} \cdot \frac{\partial a_i^{(L)}}{\partial z_i^{(L)}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y_j}{a_j^{(L)}} \cdot \frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_i^{(L)}} = -\frac{y_i}{a_i^{(L)}} a_i^{(L)} \left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} -\frac{y_j}{a_j^L} \cdot a_i^{(L)} a_j^{(L)}$$

$$= -y_i + y_i a_i^{(L)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} y_j a_i^{(L)} = -y_i + \sum_{j=1}^{n} y_j a_i^{(L)} = -y_i + a_i^{(L)} \sum_{j=1}^{n} y_j$$

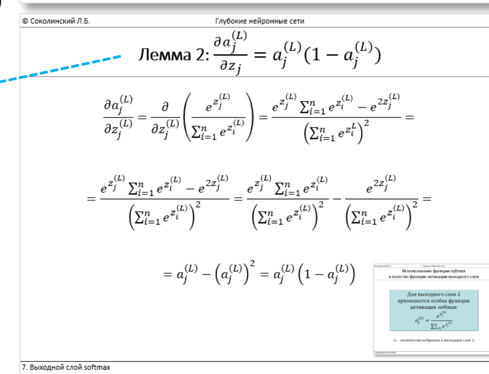
$$= -y_i + a_i^{(L)} = a_i^{(L)} - y_i$$


© Соколинский Л.Б. Глубокие нейронные сети

Лемма 1: $\frac{\partial C}{\partial a_j^{(L)}} = -\frac{y_j}{a_j^{(L)}}$

$$\frac{\partial C}{\partial a_j^{(L)}} = -\frac{\partial}{\partial a_j^{(L)}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \ln a_i^{(L)}\right) = -\frac{y_j}{a_j^{(L)}}$$

7. Выходной слой softmax 17


© Соколинский Л.Б. Глубокие нейронные сети

Лемма 2: $\frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_j} = a_j^{(L)}\left(1 - a_j^{(L)}\right)$

$$\frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_j^{(L)}} = \frac{\partial}{\partial z_j^{(L)}}\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}}}\right) = \frac{e^{z_j^{(L)}} \sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}} - e^{2z_j^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^n e^{z_i^{L}}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{z_j^{(L)}} \sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}} - e^{2z_j^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}}\right)^2} = \frac{e^{z_j^{(L)}} \sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}}\right)^2} - \frac{e^{2z_j^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}}\right)^2} =$$

$$= a_j^{(L)} - \left(a_j^{(L)}\right)^2 = a_j^{(L)}\left(1 - a_j^{(L)}\right)$$

7. Выходной слой softmax 18

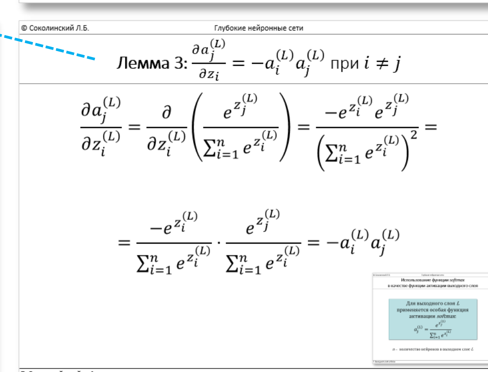

© Соколинский Л.Б. Глубокие нейронные сети

На выходе нейронной сети выдается распределение вероятностей

$$0 \leq y_j \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

7. Выходной слой softmax 2


© Соколинский Л.Б. Глубокие нейронные сети

Лемма 3: $\frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_i} = -a_i^{(L)} a_j^{(L)}$ при $i \neq j$

$$\frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_i^{(L)}} = \frac{\partial}{\partial z_i^{(L)}}\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}}}\right) = \frac{-e^{z_i^{(L)}} e^{z_j^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}}\right)^2} =$$

$$= \frac{-e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}}} \cdot \frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^n e^{z_i^{(L)}}} = -a_i^{(L)} a_j^{(L)}$$

7. Выходной слой softmax 19

Обобщение функции потерь на всю обучающую выборку

$$\mathbb{C} = -\frac{1}{|V|} \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in V} \sum_{j} y_j \ln a_j^{(L)}$$

Проблема замедления для выходного слоя отсутствует, так как:

$$\frac{\partial C}{\partial b_i^{(L)}} = a_i^{(L)} - y_i$$

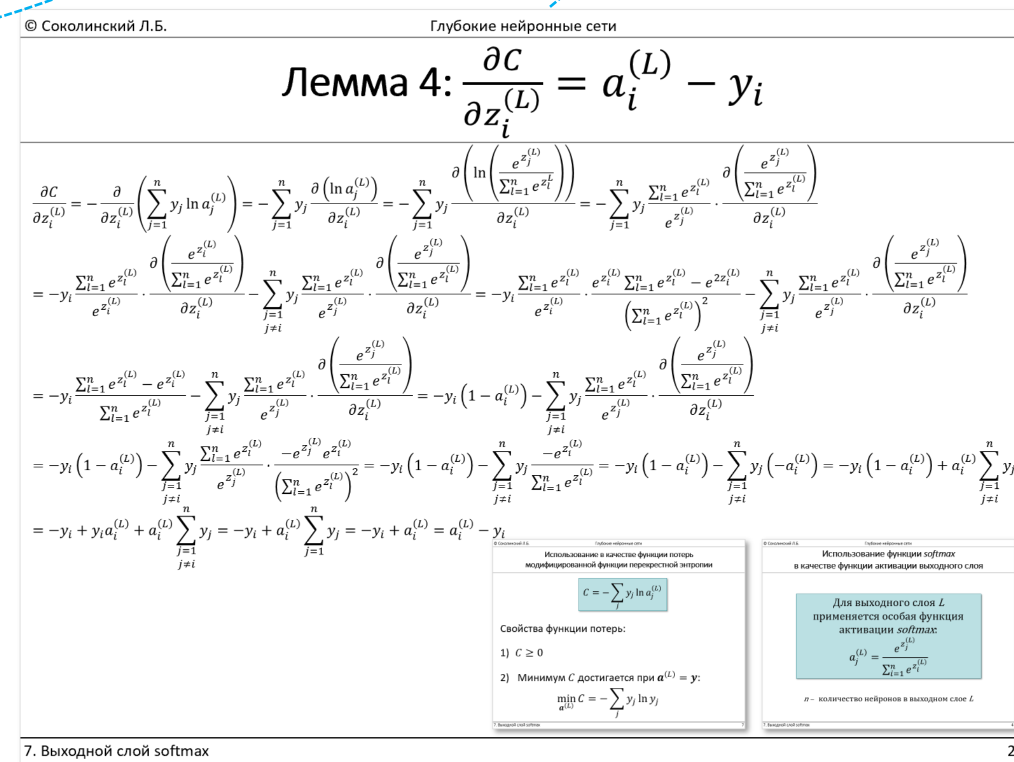
и

$$\frac{\partial C}{\partial w_{ji}^{(L)}} = a_j^{(L-1)} \left(a_i^{(L)} - y_i \right)$$

Доказательство $\dfrac{\partial C}{\partial b_i^{(L)}} = a_i^{(L)} - y_i$

$$\frac{\partial C}{\partial b_i^{(L)}} = \frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} \cdot \boxed{\frac{\partial z_i^{(L)}}{\partial b_i^{(L)}}} = \frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} \cdot 1 = \boxed{\frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} = a_i^{(L)} - y_i}$$

$$\boxed{z_i^{(L)} = b_i^{(L)} + \sum_j w_{ji}^{(L)} a_j^{(L-1)}}$$



© Соколинский Л.Б. Глубокие нейронные сети

Лемма 4: $\dfrac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} = a_i^{(L)} - y_i$

$$\frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} = -\frac{\partial}{\partial z_i^{(L)}}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \ln a_j^{(L)}\right) = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial\left(\ln a_j^{(L)}\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial\left(\ln\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{L}}}\right)\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -y_i \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_i^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -y_i \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_i^{(L)}}} \cdot \frac{e^{z_i^{(L)}} \sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}} - e^{2 z_i^{(L)}}}{\left(\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}\right)^2} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -y_i \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}} - e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{-e^{z_j^{(L)}} e^{z_i^{(L)}}}{\left(\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}\right)^2} = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{-e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}} = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j\left(-a_i^{(L)}\right) = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) + a_i^{(L)} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j$$

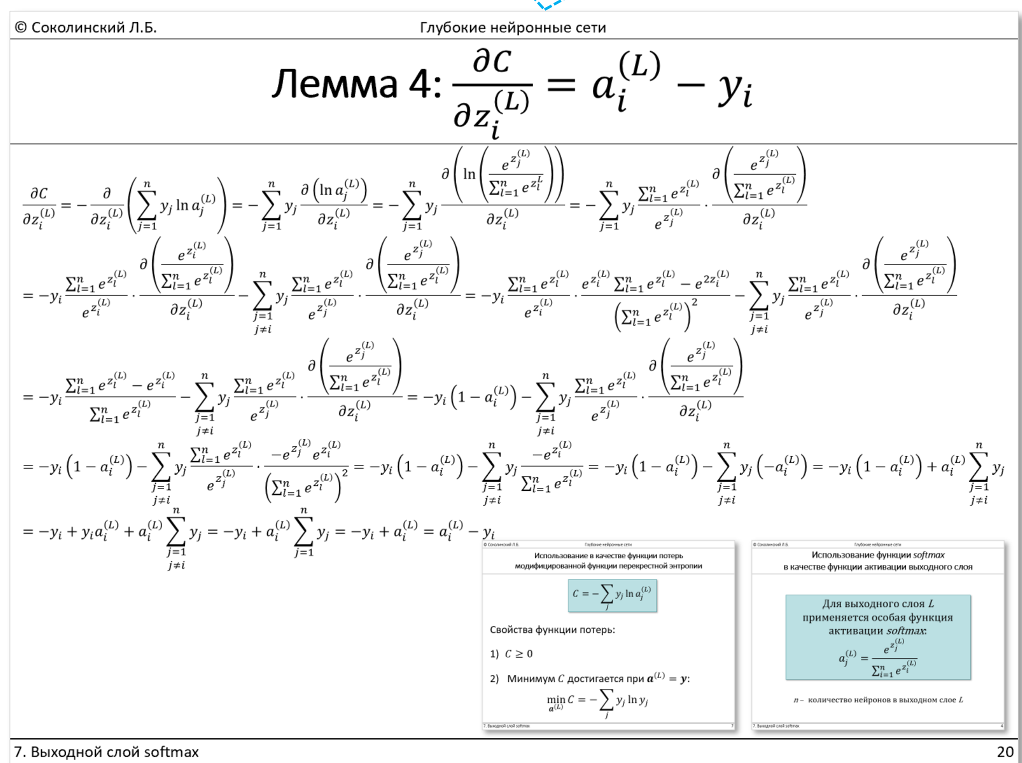
$$= -y_i + y_i a_i^{(L)} + a_i^{(L)} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j = -y_i + a_i^{(L)} \sum_{j=1}^{n} y_j = -y_i + a_i^{(L)} = a_i^{(L)} - y_i$$

7. Выходной слой softmax 20

Доказательство $\dfrac{\partial C}{\partial w_{ji}^{(L)}} = a_j^{(L-1)}\left(a_i^{(L)} - y_i\right)$

$$\frac{\partial C}{\partial w_{ji}^{(L)}} = \frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} \cdot \frac{\partial z_i^{(L)}}{\partial w_{ji}^{(L)}} = \frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} \cdot a_j^{(L-1)} = a_j^{(L-1)} \boxed{\frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}}} = a_j^{(L-1)}\left(\boxed{a_i^{(L)} - y_i}\right)$$

$$z_i^{(L)} = b_i^{(L)} + \sum_j w_{ji}^{(L)} a_j^{(L-1)}$$


© Соколинский Л.Б. Глубокие нейронные сети

Лемма 4: $\dfrac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} = a_i^{(L)} - y_i$

$$\frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} = -\frac{\partial}{\partial z_i^{(L)}}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \ln a_j^{(L)}\right) = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial\left(\ln a_j^{(L)}\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial\left(\ln\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{L}}}\right)\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -y_i \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_i^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -y_i \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_i^{(L)}}} \cdot \frac{e^{z_i^{(L)}} \sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}} - e^{2 z_i^{(L)}}}{\left(\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}\right)^2} - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -y_i \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}} - e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{-e^{z_j^{(L)}} e^{z_i^{(L)}}}{\left(\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}\right)^2} = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} y_j \frac{-e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}} = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} y_j\left(-a_i^{(L)}\right) = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) + a_i^{(L)} \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} y_j$$

$$= -y_i + y_i a_i^{(L)} + a_i^{(L)} \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} y_j = -y_i + a_i^{(L)} \sum_{j=1}^{n} y_j = -y_i + a_i^{(L)} = a_i^{(L)} - y_i$$

7. Выходной слой softmax 20

Конец лекции 7

Лемма 1: $\frac{\partial C}{\partial a_j^{(L)}} = -\frac{y_j}{a_j^{(L)}}$

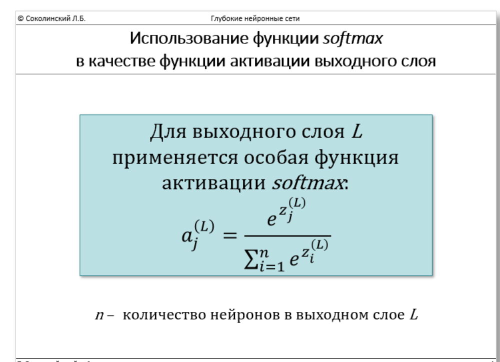
$$\frac{\partial C}{\partial a_j^{(L)}} = -\frac{\partial}{\partial a_j^{(L)}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \ln a_i^{(L)}\right) = -\frac{y_j}{a_j^{(L)}}$$

Лемма 2: $\frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_j} = a_j^{(L)}\left(1 - a_j^{(L)}\right)$

$$\frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_j^{(L)}} = \frac{\partial}{\partial z_j^{(L)}}\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}}\right) = \frac{e^{z_j^{(L)}}\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}} - e^{2z_j^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{L}}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{z_j^{(L)}}\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}} - e^{2z_j^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}\right)^2} = \frac{e^{z_j^{(L)}}\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}\right)^2} - \frac{e^{2z_j^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}\right)^2} =$$

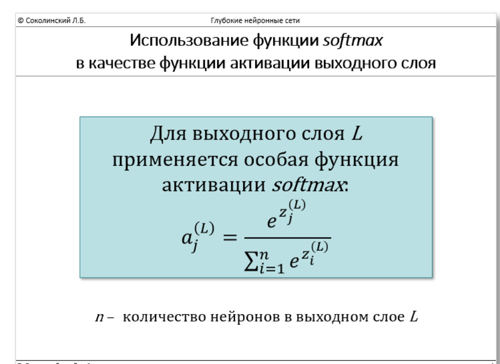
$$= a_j^{(L)} - \left(a_j^{(L)}\right)^2 = a_j^{(L)}\left(1 - a_j^{(L)}\right)$$



Лемма 3: $\dfrac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_i} = -a_i^{(L)} a_j^{(L)}$ при $i \neq j$

$$\frac{\partial a_j^{(L)}}{\partial z_i^{(L)}} = \frac{\partial}{\partial z_i^{(L)}} \left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}} \right) = \frac{-e^{z_i^{(L)}} e^{z_j^{(L)}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}} \right)^2} =$$

$$= \frac{-e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}} \cdot \frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{z_i^{(L)}}} = -a_i^{(L)} a_j^{(L)}$$



Лемма 4: $\dfrac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} = a_i^{(L)} - y_i$

$$\frac{\partial C}{\partial z_i^{(L)}} = -\frac{\partial}{\partial z_i^{(L)}}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \ln a_j^{(L)}\right) = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial\left(\ln a_j^{(L)}\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial\left(\ln\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{L}}}\right)\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -y_i \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_i^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -y_i \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_i^{(L)}}} \cdot \frac{e^{z_i^{(L)}} \sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}} - e^{2z_i^{(L)}}}{\left(\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}\right)^2} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -y_i \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}} - e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}} = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e^{z_j^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}\right)}{\partial z_i^{(L)}}$$

$$= -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}}{e^{z_j^{(L)}}} \cdot \frac{-e^{z_j^{(L)}} e^{z_i^{(L)}}}{\left(\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}\right)^2} = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \frac{-e^{z_i^{(L)}}}{\sum_{l=1}^{n} e^{z_l^{(L)}}} = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j\left(-a_i^{(L)}\right) = -y_i\left(1 - a_i^{(L)}\right) + a_i^{(L)} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j$$

$$= -y_i + y_i a_i^{(L)} + a_i^{(L)} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j = -y_i + a_i^{(L)} \sum_{j=1}^{n} y_j = -y_i + a_i^{(L)} = a_i^{(L)} - y_i$$