

2018 Global Smart Industry Conference, November 13-15



South Ural
State University

National Research
University

Strong Separation of Two Convex polytopes in Machine Learning

Irina Sokolinskaya, Galina Yadryshnikova

South Ural State University

(national research university)

Индустрия 4.0

Ключевые направления четвертой промышленной революции:

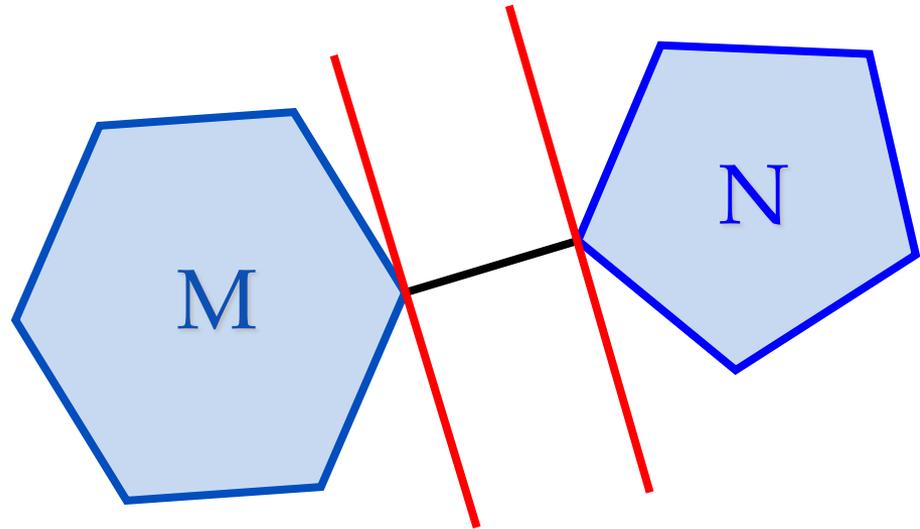
- искусственный интеллект
- машинное обучение

Классификация – одна из важнейших задач машинного обучения.

Задача сильной отделимости

$M, N \subset R^n$ – выпуклые
непересекающиеся
многогранники:

$$M = \{x | Ax \leq b\} \neq \emptyset,$$
$$N = \{y | By \leq d\} \neq \emptyset,$$
$$M \cap N = \emptyset.$$

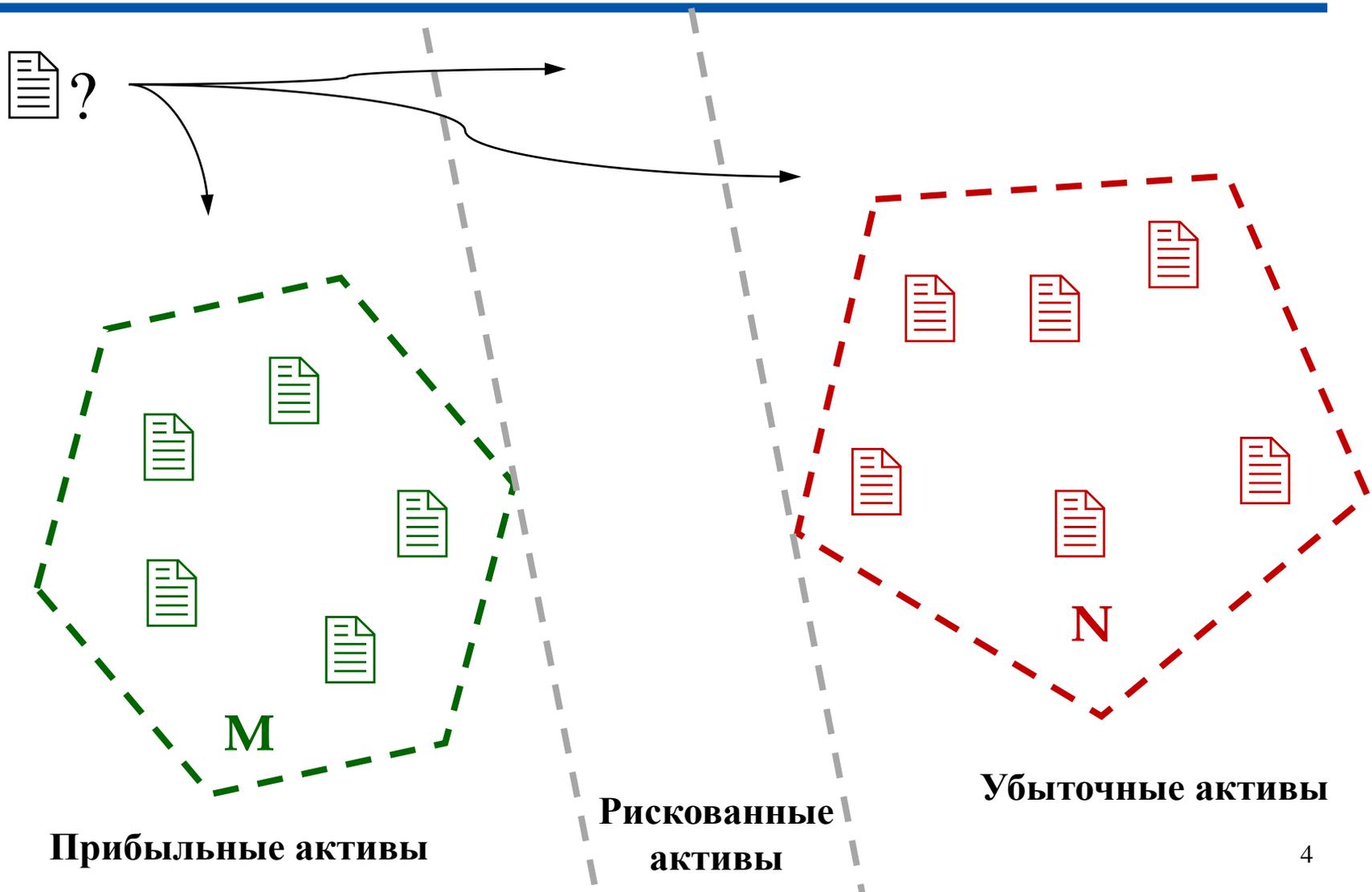


Задача заключается в нахождении слоя наибольшей
толщины, разделяющего M и N .

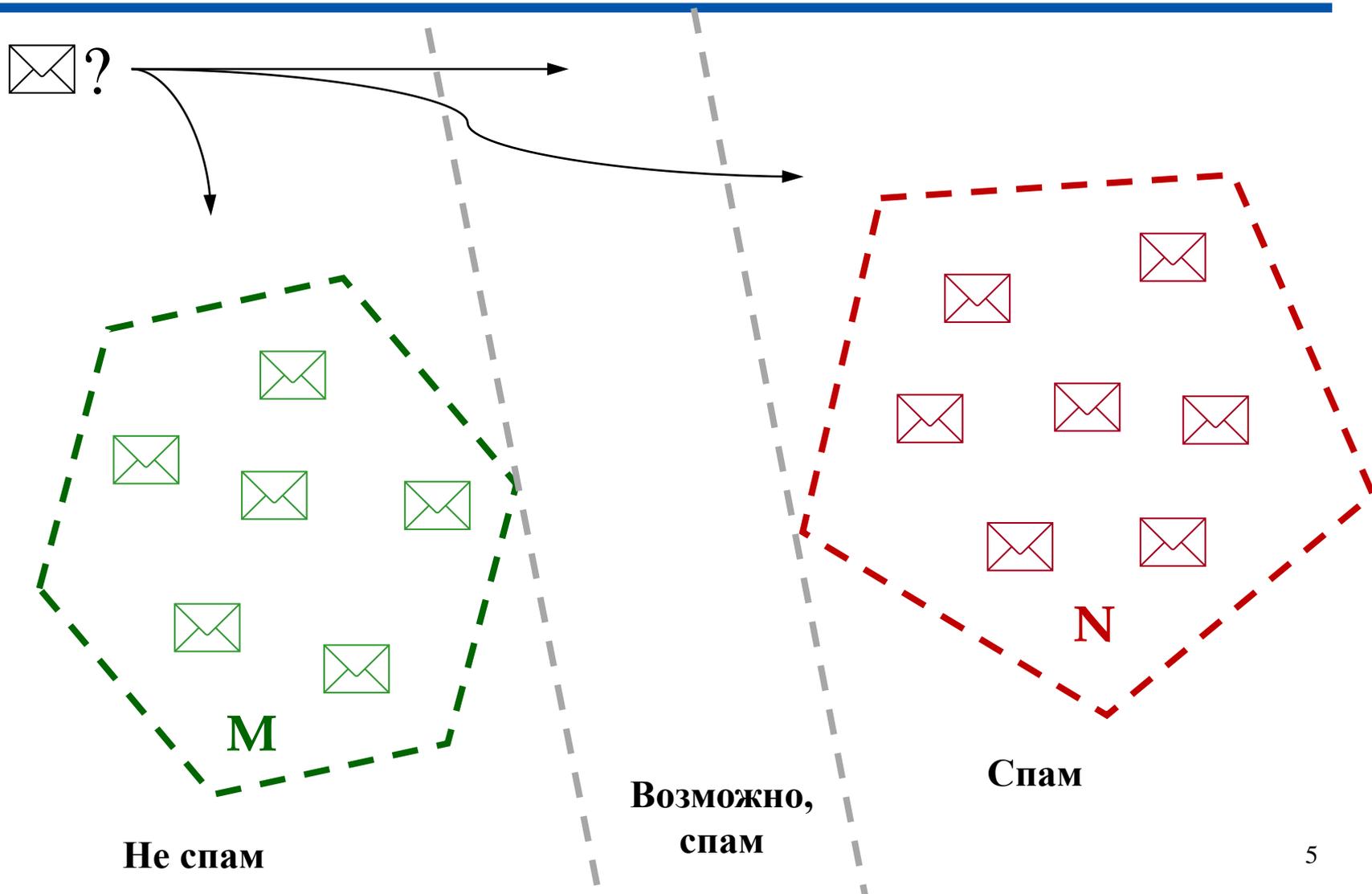
Сильная отделимость эквивалентна задаче отыскания
расстояния между M и N в смысле метрики:

$$\rho(M, N) = \min\{\|x - y\| \mid x \in M, y \in N\}$$

Задача о портфеле ценных бумаг



Задача о спам-фильтре



Алгоритм на основе фейеровских отображений

Определение фейеровского отображения:

$\varphi \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ – M -фейеровское, если

$$\varphi(y) = y, \quad \forall y \in M$$

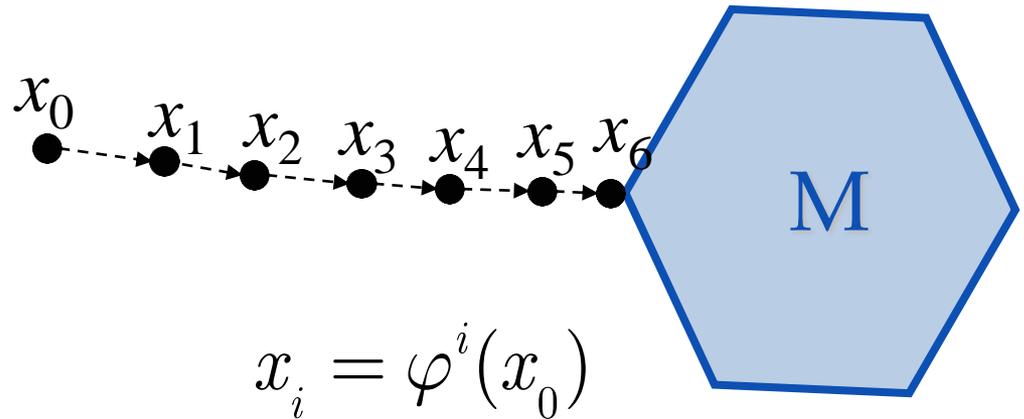
$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|, \quad \forall y \in M, \forall x \notin M$$

Фейеровский процесс

$$\varphi^s(x) = \underbrace{\varphi \dots \varphi}_{s}(x)$$

$$x_0 \in R^n$$

$$\{\varphi^s(x_0)\}_{s=0}^{+\infty}$$



Непрерывное однозначное M -фейеровское отображение сходится к точке, принадлежащей M (M - выпуклое ограниченное множество)

Вычисление фейеровского отображения

$$\varphi(x) = x - \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \frac{l_j^+(x)}{\|a_j\|^2} a_j$$

однозначное фейеровское отображение

$$\psi(x) = x - \lambda \frac{\max l_j^+(x)}{\|a_{j_x}\|^2} a_{j_x}$$

многозначное фейеровское отображение

$$Ax \leq b : l_j(x) = (a_j, x) - b_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, m$$
$$l_j^+(x) = \max \{l_j(x), 0\}, \quad j = 1, \dots, m$$

система линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$$

**система
положительных
коэффициентов**

$$0 < \lambda_j < 2$$

**коэффициент
релаксации**

Алгоритм F

Шаг 0. $k := 0$.

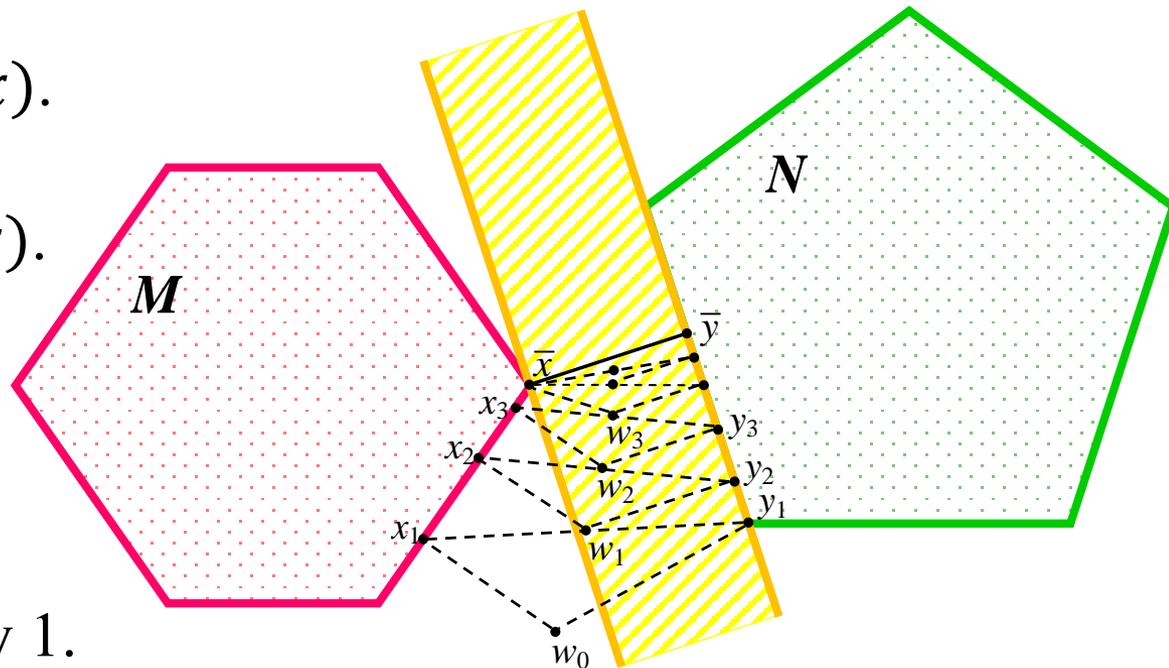
Шаг 1. $x_k := \lim_{S \rightarrow \infty} \varphi_M^S(x)$.

Шаг 2. $y_k := \lim_{S \rightarrow \infty} \varphi_N^S(x)$.

Шаг 3. $z_{k+1} := \frac{x_k + y_k}{2}$.

Шаг 4. $k := k + 1$.

Шаг 5. Перейти к шагу 1.



Критерий завершения: $\max\{\|x_k - x_{k-1}\|, \|y_k - y_{k-1}\|\} < \varepsilon$

Программная реализация

- выполнена программная реализация алгоритма F на языке C#
- проведено экспериментальное исследование поведения алгоритма F для различных выпуклых многогранников

Вычислительные эксперименты

- фейеровские отображения 1-го и 2-го ТИПОВ
- два класса задач:
 - модельная масштабируемая *Model-n*
 - генерируемая случайным образом *Random*

Модельная задача Model-n

Многогранник M

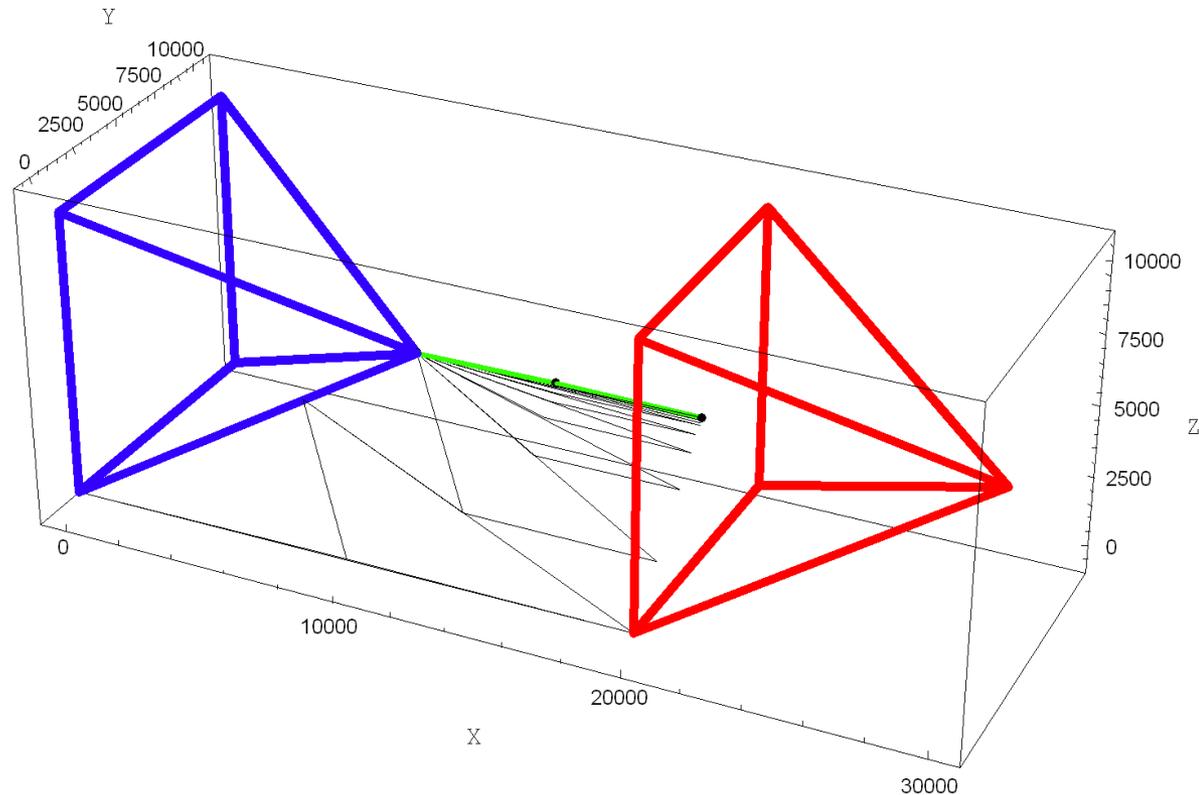
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1 - 2x_3 \leq 0 \\ \dots \\ x_1 - 2x_n \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 20000 \\ x_1 + 2x_3 \leq 20000 \\ \dots \\ x_1 + 2x_n \leq 20000 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ \dots \\ -x_n \leq 0 \end{array} \right.$$

Многогранник N

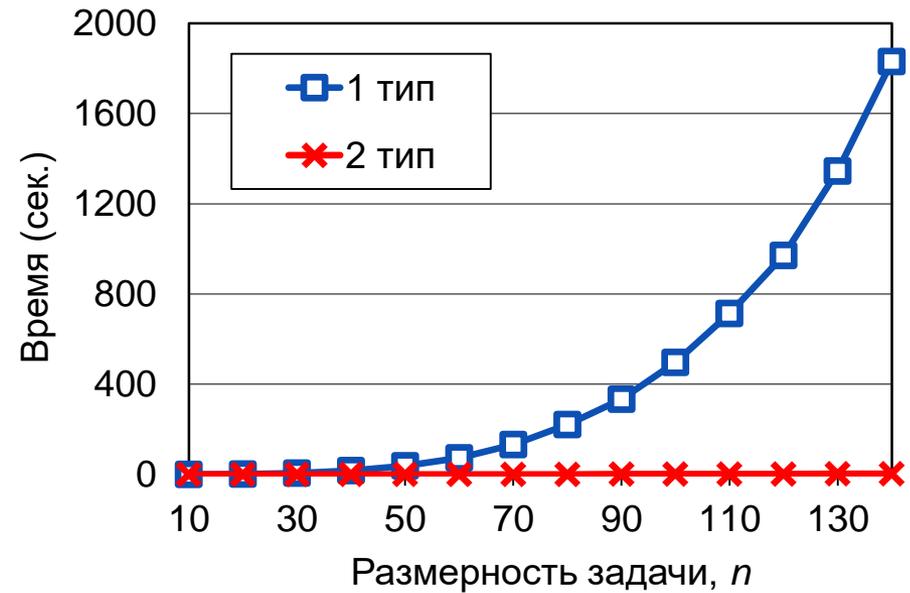
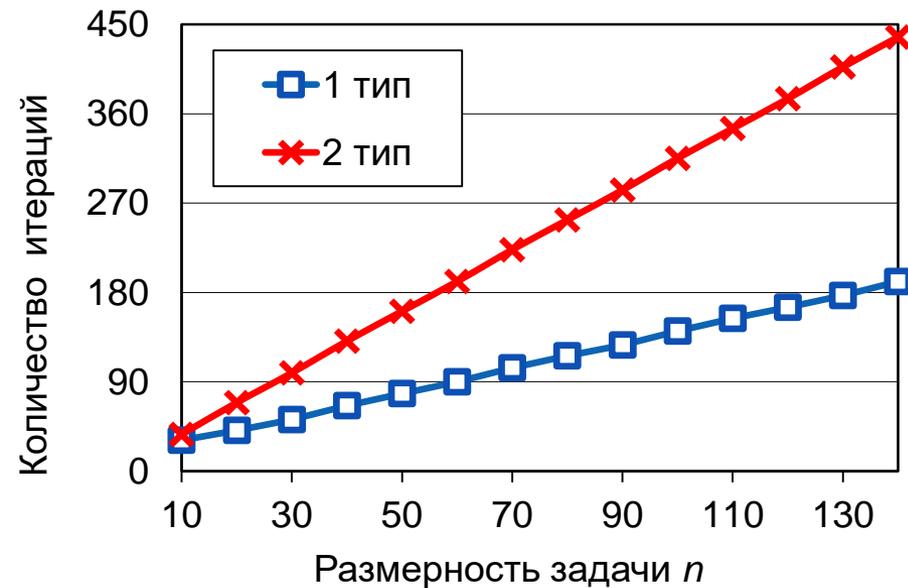
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \leq 20000 \\ x_1 - 2x_3 \leq 20000 \\ \dots \\ x_1 - 2x_n \leq 20000 \\ x_1 + 2x_2 \leq 40000 \\ x_1 + 2x_3 \leq 40000 \\ \dots \\ x_1 + 2x_n \leq 40000 \\ -x_1 \leq -20000 \\ -x_2 \leq 0 \\ \dots \\ -x_n \leq 0 \end{array} \right.$$

n – размерность задачи

Итерации последовательного алгоритма F для задачи Model-3 ($n=3$).



Вычислительные эксперименты с Model-n

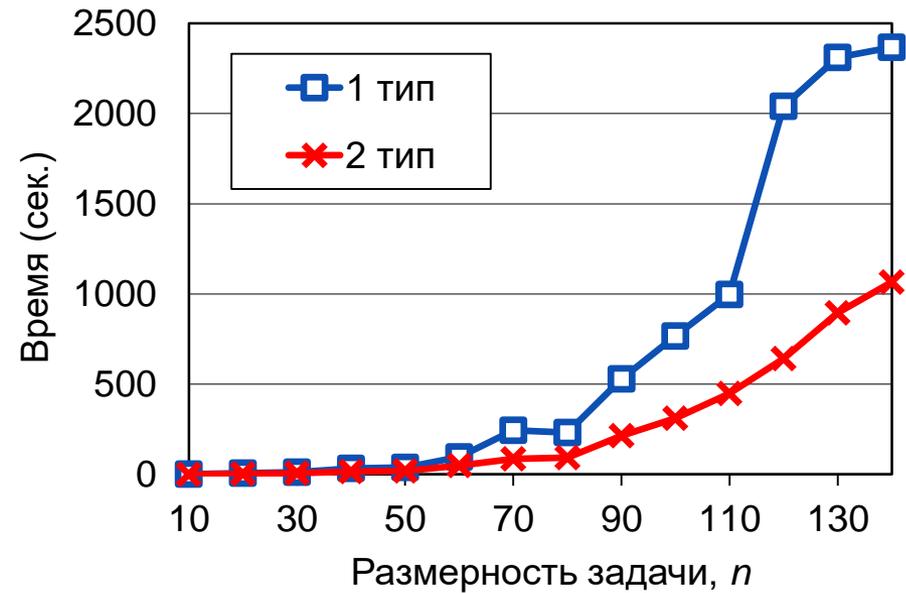
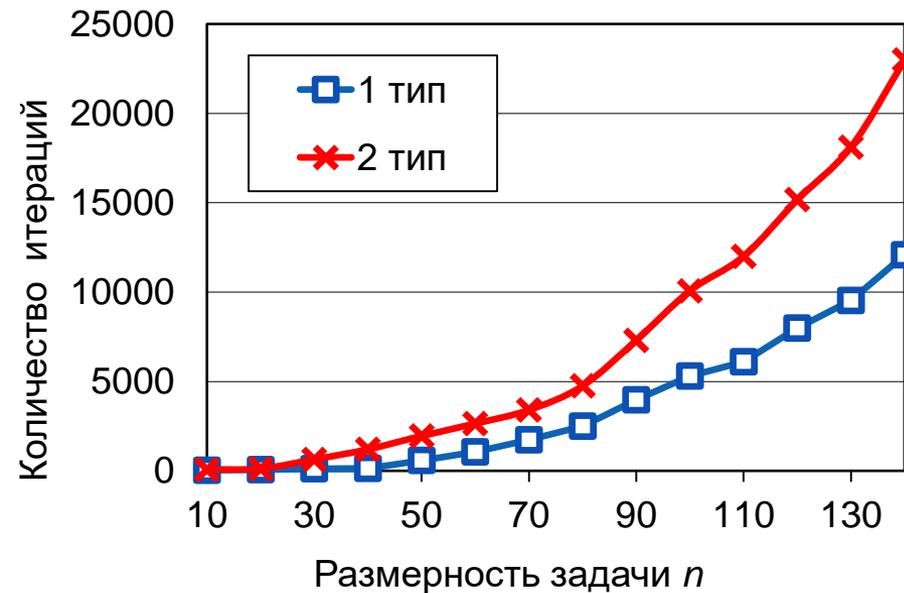


Фейеровские отображения 1 и 2 типа
 n – размерность задачи

Класс задач Random

- задачи сгенерированы специальной программой
- два выпуклых непересекающихся многогранника задаются двумя случайным образом сгенерированными системами линейных неравенств

Вычислительные эксперименты с Random



Фейеровские отображения 1 и 2 типа
 n – размерность задачи

Направления дальнейших исследований

- Разработка параллельной версии алгоритма
- Реализация параллельной программы с использованием технологии параллельного программирования MPI
- Проведение вычислительных экспериментов на кластерной вычислительной системе с использованием искусственных и реальных задач большой и сверхбольшой размерности

Спасибо за внимание!