Международная научная конференция «Параллельные вычислительные технологии 2018»
(Ростов-на-Дону, 3 апреля 2018 г.)

Параллельный метод псевдопроекций для линейных неравенств

к.ф.-м.н. И.М. Соколинская
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-07-00352а и Правительства РФ в соответствии с Постановлением №211 от 16.03.2013 г. (соглашение № 02.А03.21.0011)

Система линейных неравенств

$$l_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leq 0 (i = 1, \dots, m)$$

Задача линейного программирования

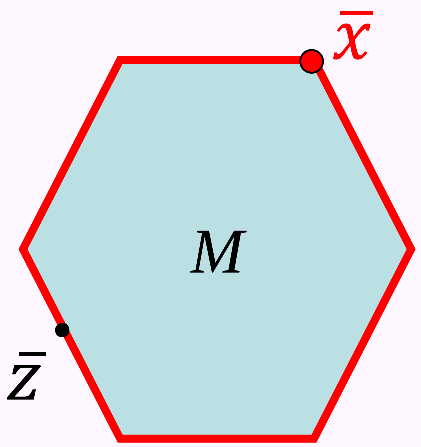
$$\{\langle c, x\rangle | Ax \le b, x \ge 0\}$$

- $x \in \mathbb{R}_n$
- A – матрица $m \times n$
- c, b – векторы размерности n

Алгоритм NSLP (Non Stationary Linear Programming)

Фазы алгоритма:

- *Quest* – поиск точки $\bar{z} \in M$
- *Targeting* – перемещение точки $\bar{z}$ таким образом, чтобы точное решение $\bar{x}$ задачи ЛП находилось в ее ε-окрестности

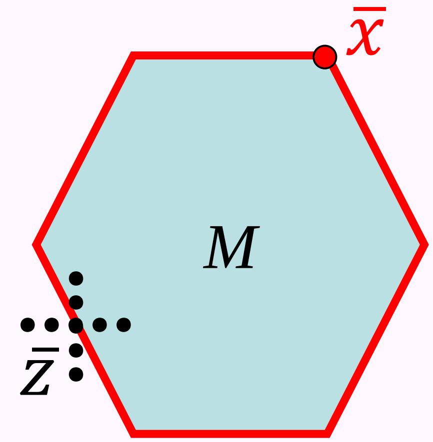


$$Ax \leq b \Leftrightarrow x \in M$$

Алгоритм NSLP (Non Stationary Linear Programming)

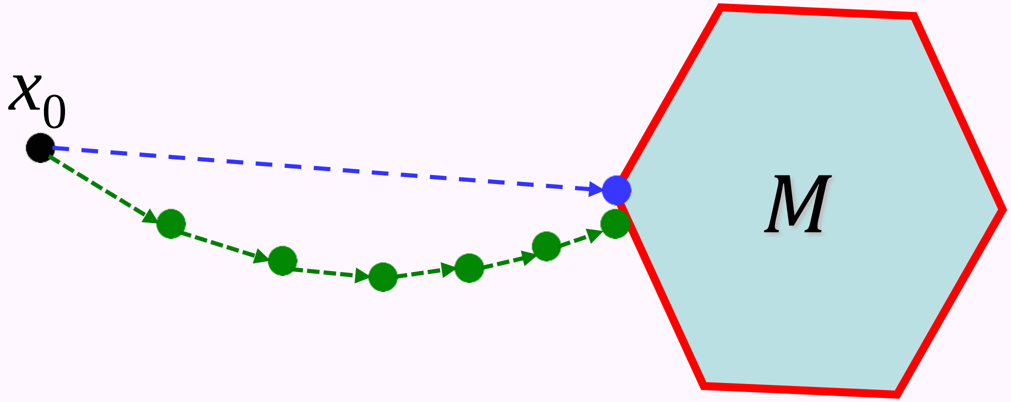
Фазы алгоритма:

- *Quest* – поиск точки $\bar{z} \in M$
- *Targeting* – перемещение точки $\bar{z}$ таким образом, чтобы точное решение $\bar{x}$ задачи ЛП находилось в ее ε-окрестности



$$Ax \leq b \Leftrightarrow x \in M$$

Псевдопроектирование



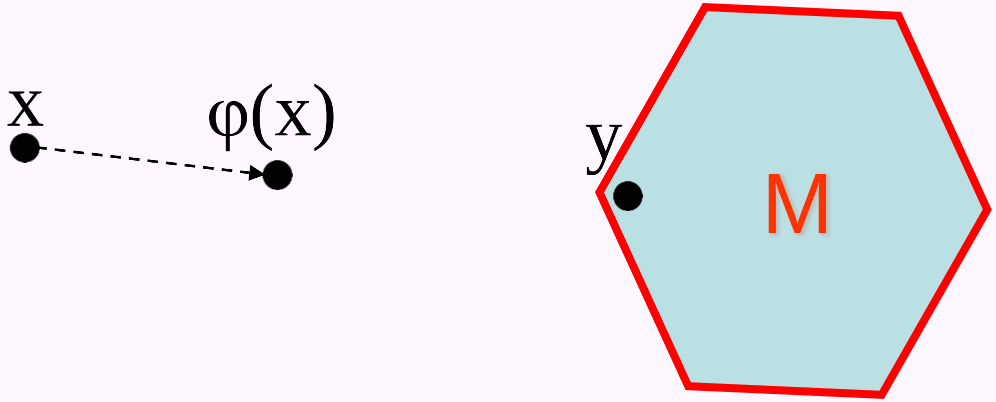
Фейеровские отображения

M – выпуклое ограниченное множество

$\varphi \in \{R^n \to R^n\}$ – M -фейеровское, если

$$\varphi(y) = y,\ \forall y \in M\ ;$$

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|,\ \forall y \in M,\ \forall x \notin M.$$



Липот Фейер (*Lipót Fejér*, 1880 – 1959) – венгерский математик

Фейеровское отображение для фазы Quest

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\max\{\langle a_i, x\rangle - b_i, 0\}}{\|a_i\|^2} \cdot a_i$$

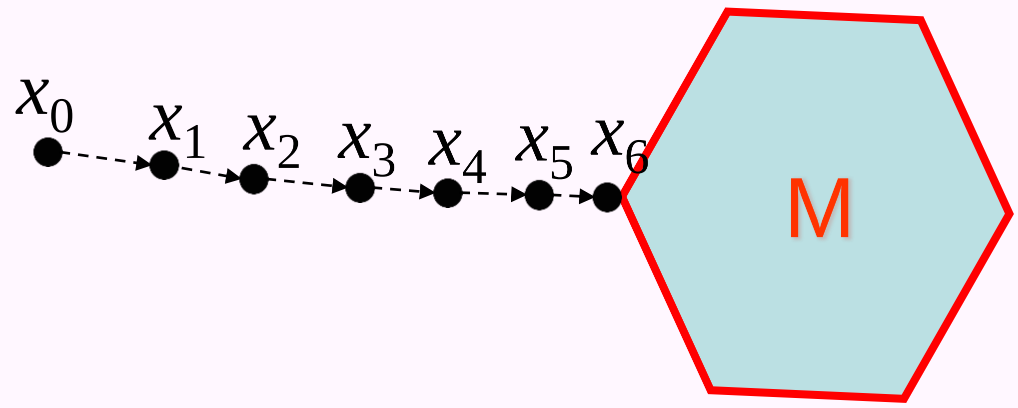
- a_i – i-тая строка матрицы A
- $b_1, \dots, b_m$ – элементы столбца b
- m – количество строк матрицы

Фейеровский процесс

$$\varphi^{s}(x)=\underbrace{\varphi\ldots\varphi(x)}_{s}$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\{\varphi^{s}(x_0)\}_{s=0}^{+\infty}$$



$$x_i=\varphi^{i}(x_0)$$

Непрерывное однозначное М-фейеровское отображение сходится к точке, принадлежащей М (М - выпуклое ограниченное множество)

Метод подвекторов

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{P}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{P}_r, \qquad \mathbb{P}_i \perp \mathbb{P}_j \text{ при } i \neq j$$

$$\bar{x}^i \in \operatorname{Arg}\min_{x \in M} \rho(\mathbb{P}_i, M)$$

$$\bar{z}^i = \pi_{\mathbb{P}_i^\perp}\left(\bar{x}^i\right)$$

$$\mathbb{L}_i = \mathbb{P}_i + \bar{z}^i$$

$$\varphi_i(x) = \pi_{\mathbb{L}_i}\left(\varphi\left(\pi_{\mathbb{L}_i}(x)\right)\right)$$

Параллельный алгоритм $\mathfrak{S}$ построения псевдопроекции

Шаг 0. $k := 0$.

Шаг 1. $x_{k+1} := \sum\limits_{i=1}^{r}\left(\varphi_i^s(x_k) - \bar{z}^i\right)$.

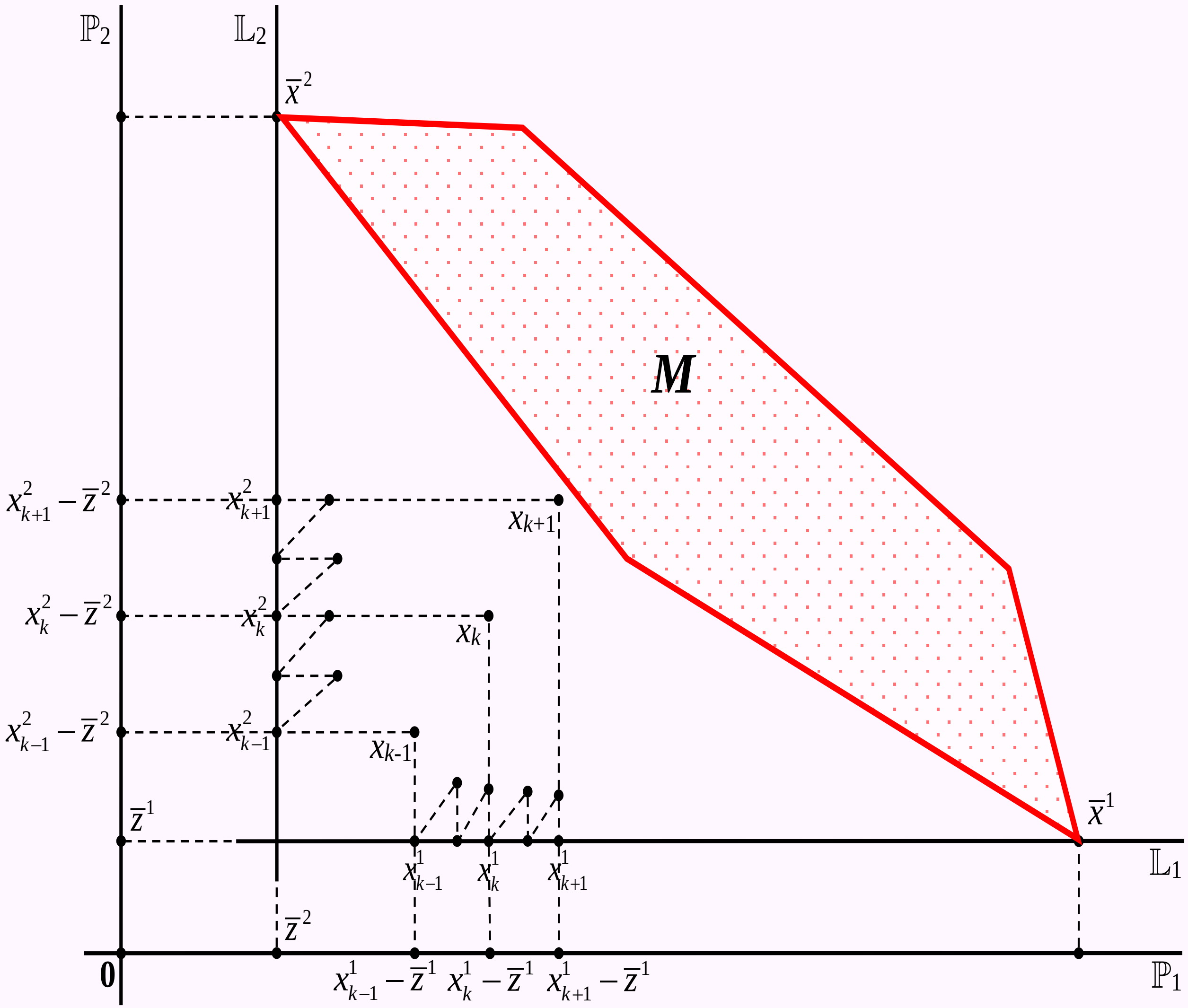
Шаг 2. $k := k+1$.

Шаг 3. Если $\|x_{k+1} - x_k\| \geq \varepsilon$ & $d_M(x_{k+1}) \geq \varepsilon$, перейти на шаг 1.

Шаг 4. Стоп.

Невязка: $d_M(x) = \sum_{j=1}^{m} \max\{\langle a_j, x\rangle - b_j, 0\}$

Работа алгоритма $\mathfrak{S}$



Теорема сходимости

Пусть $\{x_k\}$ – последовательность точек, порождаемых алгоритмом $\mathfrak{S}$:

$$x_{k+1} := \sum_{i=1}^{r} \left(\varphi_i^s(x_k) - \bar{z}^i\right); \;\; k = 0,1, \ldots$$

Тогда

$$\{x_k\}_{k=0}^{+\infty} \to \bar{x} \in M.$$

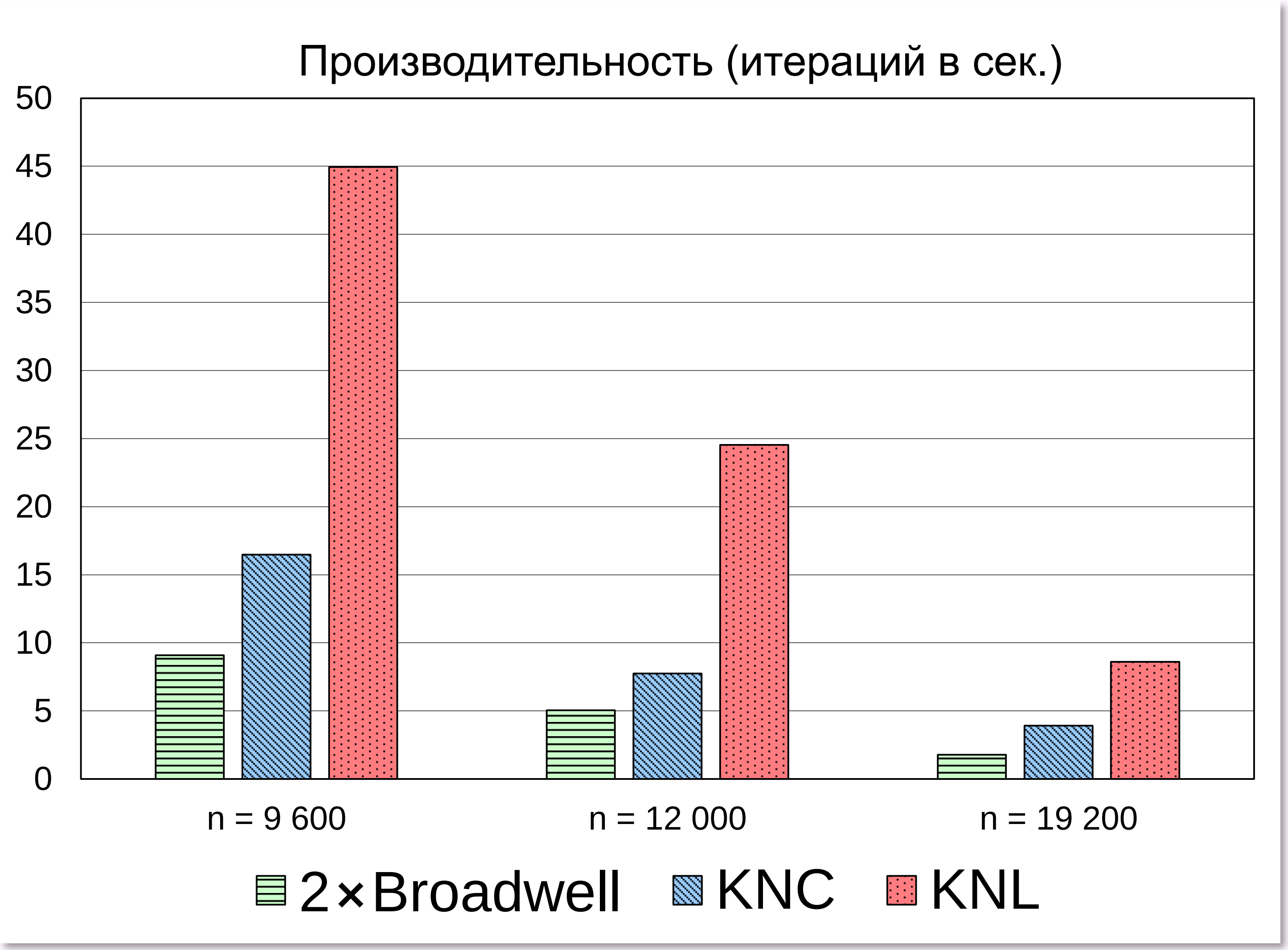
Реализация

- C++
- OpenMP
- Использование ускорителей Xeon Phi

Система линейных неравенств для вычислительных экспериментов

$$\begin{cases}
x_0 & & & & \le & 200 \\
& x_1 & & & \le & 200 \\
& & \ddots & & \cdots & \cdots \\
& & & x_{n-1} & \le & 200 \\
x_0 & + \; x_1 & \cdots & + \; x_{n-1} & \le & 200(n-1)+100 \\
x_0 & + \; x_1 & \cdots & + \; x_{n-1} & \ge & 100 \\
x_0 & & & & \ge & 0 \\
& x_1 & & & \ge & 0 \\
& & \ddots & & \cdots & \cdots \\
& & & x_{n-1} & \ge & 0
\end{cases}$$

Результаты вычислительных экспериментов



Спасибо за внимание!